Übungsblatt 9 – Lösungen

Aufgabe 1.
Sei $X = B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{C}$. Betrachte ferner die Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$. Dann ist $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$. Angenommen, es gäbe ein $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit $f = \exp \circ g$. Dann wäre $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \cdot g(z)} = z$ für alle $z \in X$. Durch Betrachten der Kurve $[0,1] \to X$, $t \mapsto \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2\pi i t}$ erhalten wir einen Widerspruch (der Logarithmus existiert nicht auf ganz X).

Aufgabe 2.
Für $f \in \mathrm{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und ein $(q+1)$-Simplex $\sigma = (U_0, \dots, U_{q+1})$ ist

$$(\delta f)(\sigma) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (f(U_0, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_{q+1}))|_{|\sigma|}\,.$$

Also gilt für ein $(q+2)$-Simplex $\sigma = (U_0, \dots, U_{q+2})$ folglich

$$\begin{aligned}(\delta^2 f)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{q+2}\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (-1)^i (f(U_0, \dots, U_{j-1}, U_{j+1}, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_{q+2}))|_{|\sigma|} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{q+2}\sum_{j=i+1}^{q+2} (-1)^{j-1} (-1)^i (f(U_0, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_{j-1}, U_{j+1}, \dots, U_{q+2}))|_{|\sigma|}\,.\end{aligned}$$

Offensichtlich stimmen beide Summen nach Vertauschen von i und j bis auf das Vorzeichen überein. Folglich ist $(\delta^2 f)(\sigma) = 0$.

Aufgabe 3.
Sei $f \in \mathrm{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit $\delta f = 0$ und $\mu^*([f]) = 0$ gegeben. Folglich gibt es ein $g \in \mathrm{C}^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ mit $\mu(f) = \delta g$. Für ein 1-Simplex $\tau = (V_0, V_1)$ von $\mathcal{V}$ gilt somit

$$f(\mu(V_0), \mu(V_1))|_{|\tau|} = (\mu f)(V_0, V_1) = g(V_0)|_{|\tau|} - g(V_1)|_{|\tau|}\,.$$

Ferner gilt für ein 2-Simplex $\sigma = (U_0, U_1, U_2)$ von $\mathcal{U}$, dass

$$f(U_1, U_2)|_{|\sigma|} - f(U_0, U_2)|_{|\sigma|} + f(U_0, U_1)|_{|\sigma|} = (\delta f)(U_0, U_1, U_2) = 0\,.$$

Sei nun $U \in \mathcal{U}$ gegeben. Für $V_\alpha \in \mathcal{V}$ sei $W_\alpha := U \cap V_\alpha$. Da $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = X$ gilt, ist $\bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha = U$. Sei ferner

$$h_\alpha := f(U, \mu(V_\alpha))|_{W_\alpha} + g(V_\alpha)|_{W_\alpha}\,.$$

Für $\alpha, \beta \in I$ ist

$$\begin{aligned}
&h_\alpha|_{W_\alpha \cap W_\beta} - h_\beta|_{W_\alpha \cap W_\beta} \\
&= f(U, \mu(V_\alpha))|_{W_\alpha \cap W_\beta} + g(V_\alpha)|_{W_\alpha \cap W_\beta} - f(U, \mu(V_\beta))|_{W_\alpha \cap W_\beta} - g(V_\beta)|_{W_\alpha \cap W_\beta} \\
&= f(\mu(V_\alpha), \mu(V_\beta))|_{W_\alpha \cap W_\beta} - f(U, \mu(V_\beta))|_{W_\alpha \cap W_\beta} + f(U, \mu(V_\alpha))|_{W_\alpha \cap W_\beta} \\
&= (\delta f)(U, \mu(V_\alpha), \mu(V_\beta))|_{W_\alpha \cap W_\beta} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Folglich gibt es ein $h(U) \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ mit $h(U)|_{W_\alpha} = h_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Dies definiert $h \in \mathrm{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Sei nun ein 1-Simplex $\sigma = (U_0, U_1)$ von $\mathcal{U}$ gegeben. Für $\alpha \in I$ sei $W'_\alpha := U_0 \cap U_1 \cap V_\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&h(U_0)|_{W'_\alpha} - h(U_1)|_{W'_\alpha} \\
&= f(U_0, \mu(V_\alpha))|_{W'_\alpha} + g(V_\alpha)|_{W'_\alpha} - f(U_1, \mu(V_\alpha))|_{W'_\alpha} - g(V_\alpha)|_{W'_\alpha} \\
&= f(U_0, U_1)|_{W'_\alpha}
\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in I$, da

$$f(U_1, \mu(V_\alpha))|_{W'_\alpha} - f(U_0, \mu(V_\alpha))|_{W'_\alpha} + f(U_0, U_1)|_{W'_\alpha} = (\delta f)(U_0, U_1, \mu(V_\alpha))|_{W'_\alpha} = 0$$

gilt. Insbesondere folgt, dass

$$f(U_0, U_1) = h(U_0)|_{|\sigma|} - h(U_1)|_{|\sigma|} = (\delta h)(U_0, U_1)$$

gilt. Also ist $f = \delta h$ und somit $[f] = 0$ in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Folglich ist $\mu^* \colon H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ injektiv. Aufgrund der Definition von $H^1(X, \mathcal{F})$ ist somit auch die Abbildung $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F})$ injektiv.

Aufgabe 4.
Es ist $H^0(X, \mathbb{C}_p) \cong \Gamma(X, \mathbb{C}_p) \cong \mathbb{C}$ nach Konstruktion der Wolkenkratzer-Garbe $\mathbb{C}_p$.

Sei nun $q > 0$ und sei $\mathcal{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es ein $\alpha_0 \in I$, sodass $p \in U_{\alpha_0}$. Für $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$ sei $V_\alpha := U_\alpha \setminus \{p\}$ und ferner sei $V_{\alpha_0} := U_{\alpha_0}$. Dann ist $\mathcal{V} := \{V_\alpha \colon \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung von X. Ferner ist $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, da $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ gilt. Außerdem ist $p \in V_\alpha$ genau dann, wenn $\alpha = \alpha_0$. Insbesondere gilt für ein q-Simplex $(V_0, \ldots, V_q)$, dass $p \notin V_0 \cap \cdots \cap V_q$. Folglich ist $\Gamma(V_0 \cap \cdots \cap V_q, \mathbb{C}_p) = 0$. Also ist $\mathrm{C}^q(\mathcal{V}, \mathbb{C}_p) = 0$ und somit auch $H^q(\mathcal{V}, \mathbb{C}_p) = 0$.

Da es also für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Verfeinerung $\mathcal{V}$ gibt, sodass $H^q(\mathcal{V}, \mathbb{C}_p) = 0$ gilt, folgt, dass $H^q(X, \mathbb{C}_p) = 0$.