# Übungsblatt 8 – Lösungen

**Aufgabe 1.**

(a) Zunächst einmal gilt nach Definition des Halmes: Sind $U, V \in \mathcal{U}_p$ mit $V \subseteq U$ und ist $s \in F(U)$, so ist $[s]_p = [\rho_{UV}(s)]_p$.
Seien nun $[s]_p, [t]_p \in \mathcal{F}_p$. Dann gibt es $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_p$ mit $s \in F(U_1)$ und $t \in F(U_2)$. Ferner gibt es ein $V \in \mathcal{U}_p$ mit $V \subseteq U_1 \cap U_2$. Definiere

$$\begin{aligned} -[s]_p &:= [-s]_p \in \mathcal{F}_p \quad \text{und} \\ [s]_p + [t]_p &:= [\rho_{U_1V}(s) + \rho_{U_2V}(t)]_p \in \mathcal{F}_p\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist diese Definition unabhängig von der Wahl von $V$, da die Einschränkungsabbildungen Gruppenmorphismen sind.
Seien ferner $[s']_p = [s]_p$ und $[t']_p = [t]_p$. Dann gibt es $U_1', U_2' \in \mathcal{U}_p$ mit $s' \in F(U_1')$ und $t' \in F(U_2')$ und ferner $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \in \mathcal{U}_p$ mit $\tilde{U}_1 \subseteq U_1 \cap U_1'$ und $\tilde{U}_2 \subseteq U_2 \cap U_2'$, sodass $\rho_{U_1\tilde{U}_1}(s) = \rho_{U_1'\tilde{U}_1}(s')$ und $\rho_{U_2\tilde{U}_2}(t) = \rho_{U_2'\tilde{U}_2}(t')$. Außerdem gibt es ein $V' \in \mathcal{U}_p$ mit $V' \subseteq \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$. Dann sind $\rho_{U_1V'}(s) = \rho_{\tilde{U}_1V'}(\rho_{U_1\tilde{U}_1}(s)) = \rho_{\tilde{U}_1V'}(\rho_{U_1'\tilde{U}_1}(s')) = \rho_{U_1'V'}(s')$ und $\rho_{U_2V'}(t) = \rho_{\tilde{U}_2V'}(\rho_{U_2\tilde{U}_2}(t)) = \rho_{\tilde{U}_2V'}(\rho_{U_2'\tilde{U}_2}(t')) = \rho_{U_2'V'}(t')$. Folglich ist

$$\begin{aligned} [-s]_p = [-\rho_{U_1V}(s)]_p = [-\rho_{U_1'V}(s')]_p = [-s']_p \quad \text{und} \\ [\rho_{U_1V'}(s) + \rho_{U_2V'}(t)]_p = [\rho_{U_1'V'}(s') + \rho_{U_2'V'}(t')]_p\,. \end{aligned}$$

(b) Um zu zeigen, dass diese Mengen eine Basis für eine Topologie bilden, sind zwei Bedingungen zu zeigen.
Die Vereinigung ist ganz $\mathcal{F}$: Sei $f \in \mathcal{F}$ und sei $p := \pi(f)$. Dann gibt es ein offenes $U \subseteq M$ mit $p \in U$ und ein $s \in F(U)$, sodass $f = [s]_p$. Offensichtlich ist dann $f \in \mathcal{W}_{U,s}$. Folglich ist

$$\bigcup_{\substack{U \subseteq M \text{ offen} \\ s \in F(U)}} \mathcal{W}_{U,s} = \mathcal{F}\,.$$

Der Schnitt zweier dieser Mengen ist Vereinigung von solchen Mengen: Seien $U_1, U_2 \subseteq M$ offen und $s \in F(U_1)$, $t \in F(U_2)$. Sei ferner $f \in \mathcal{W}_{U_1,s} \cap \mathcal{W}_{U_2,t}$ und sei $p := \pi(f)$. Dann ist $p \in U_1 \cap U_2$. Ferner ist $[s]_p = f = [t]_p$. Es gibt also ein offenes $V \subseteq U_1 \cap U_2$ mit $p \in V$, sodass $\rho_{U_1V}(s) = \rho_{U_2V}(t)$ gilt. Insbesondere ist $f \in \mathcal{W}_{V,\rho_{U_1V}(s)} \subseteq \mathcal{W}_{U_1,s} \cap \mathcal{W}_{U_2,t}$.

(c) Sei $f \in \mathcal{F}$ und sei $p := \pi(f)$. Dann gibt es ein offenes $U \subseteq M$ mit $p \in U$ und ein $s \in F(U)$, sodass $f = [s]_p$. Sei ferner $\tilde{f} \in \mathcal{W}_{U,s}$ und sei $q := \pi(\tilde{f})$. Nach Definition von $\mathcal{W}_{U,s}$ ist dann $\tilde{f} = [s]_q$. Folglich ist die Abbildung $\pi|_{\mathcal{W}_{U,s}} \colon \mathcal{W}_{U,s} \to U$ bijektiv.

Sei nun $V \subseteq U$ offen. Dann ist $\pi^{-1}(V) = \{[s]_q : q \in V\} = \{[\rho_{UV}(s)]_q : q \in V\} = \mathcal{W}_{V,\rho_{UV}(s)}$ offen. Also ist $\pi|_{\mathcal{W}_{U,s}}$ stetig. Da die Mengen $\mathcal{W}_{U,s}$ eine Basis der Topologie bilden, ist somit $\pi : \mathcal{F} \to M$ stetig.
Umgekehrt sei $\tilde{V} \subseteq \mathcal{W}_{U,s}$ offen und sei $f \in \tilde{V}$. Sei ferner $p := \pi(f)$. Dann ist $f = [s]_p$. Da $\tilde{V}$ offen ist und die Mengen $\mathcal{W}_{V,t}$ eine Basis bilden, gibt es ein offenes $V \subseteq M$ mit $p \in V$ und ein $t \in F(V)$, sodass $\mathcal{W}_{V,t} \subseteq \tilde{V}$. Da $\mathcal{W}_{V,t} \subseteq \mathcal{W}_{U,s}$ gilt, ist somit $V \subseteq U$. Somit ist $\pi(\mathcal{W}_{V,t}) = V$ offen. Also ist auch $(\pi|_{\mathcal{W}_{U,s}})^{-1}$ stetig.
Daher ist $\pi : \mathcal{F} \to M$ ein lokaler Homöomorphismus.

**Aufgabe 2.**

(a) Sei $V \subseteq U$ offen und sei $p \in V$. Da $\pi : \mathcal{F} \to M$ ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es eine offene Teilmenge $W \subseteq V$ mit $p \in W$ und eine offene Teilmenge $\tilde{W} \subseteq \pi^{-1}(W)$ mit $s(p) \in \tilde{W}$, sodass $\pi|_{\tilde{W}} : \tilde{W} \to W$ ein Homöomorphismus ist. Da $s$ stetig ist, gibt es ein offenes $\tilde{V} \subseteq W$ mit $p \in \tilde{V}$, sodass $s(\tilde{V}) \subseteq \tilde{W}$. Weil $s$ ein Schnitt ist, gilt $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. Folglich ist $s|_{\tilde{V}} = (\pi|_{\tilde{W}})^{-1}|_{\tilde{V}}$. Insbesondere ist $s(\tilde{V})$ offen. Da $p \in V$ beliebig war, ist somit auch $s(V)$ offen. Da $V$ eine beliebige offene Teilmenge von $U$ war, ist somit $s$ eine offene Abbildung.

(b) Da $\pi : \mathcal{F} \to M$ ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es offene Teilmengen $V \subseteq U$ und $\tilde{V} \subseteq \pi^{-1}(V)$ mit $p \in V$, sodass $\pi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ ein Homöomorphismus ist. Aus $\pi \circ s = \mathrm{id}_U = \pi \circ t$ folgt, dass $s|_V = (\pi|_{\tilde{V}})^{-1} = t|_V$.

**Aufgabe 3.**
Dass $\mathcal{B}$ eine Prägarbe definiert, ist offensichtlich, da die gewöhnliche Einschränkungsabbildung ein Gruppenhomomorphismus ist, welcher die Prägarbenaxiome erfüllt.

(a) Für $x \in U$ gibt es ein $\alpha \in I$, sodass $x \in U_\alpha$, da $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ eine Überdeckung ist. Aus $f|_{U_\alpha} = g|_{U_\alpha}$ folgt somit $f(x) = g(x)$. Da $x \in U$ beliebig war, ist $f = g$.

(b) Als Gegenbeispiel kann man z. B. $U = X = \mathbb{C}$, $I = \mathbb{N}$, $U_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < n\}$, $f_n : U_n \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = z$ nehmen. Offensichtlich sind alle $f_n$ beschränkt, aber die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ ist unbeschränkt.

**Aufgabe 4.**
Seien $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ die entsprechenden Garbenmorphismen.

„$\Rightarrow$“: Sei $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ exakt. Dann ist $\operatorname{im} \alpha = \ker \beta$. Sei nun $p \in M$. Ist $g \in \mathcal{G}_p$ derart, dass $\beta_p(g) = 0$, so gibt es folglich ein $f \in \mathcal{F}$ mit $\alpha(f) = g$. Da $\alpha$ ein Garbenmorphismus ist, ist $f \in \mathcal{F}_p$. Also ist $\ker \beta_p \subseteq \operatorname{im} \alpha_p$. Sei umgekehrt $f \in \mathcal{F}_p$. Dann ist $\beta(\alpha(f)) = 0$, also ist auch $\beta_p(\alpha_p(f)) = 0$. Folglich ist auch $\operatorname{im} \alpha_p \subseteq \ker \beta_p$. Somit ist $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \to \mathcal{H}_p$ exakt.

„$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \to \mathcal{H}_p$ für alle $p \in M$ exakt. Für $f \in \mathcal{F}$ ist $(\beta \circ \alpha)(f) = (\beta_{\pi(f)} \circ \alpha_{\pi(f)})(f) = 0$. Folglich ist $\operatorname{im} \alpha \subseteq \ker \beta$. Sei umgekehrt $g \in \ker \beta$. Dann ist $\beta_{\pi(g)}(g) = 0$. Also gibt es ein $f \in \mathcal{F}_{\pi(g)}$ mit $\alpha_{\pi(g)}(f) = g$. Folglich ist $\ker \beta \subseteq \operatorname{im} \alpha$. Somit ist $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ exakt.