Übungsblatt 7 – Lösungen

Aufgabe 1.

(a) Es gelten $\frac{\partial F}{\partial z} = F$ und $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$. Also ist

$$(F^*(\omega))_z = \frac{1}{F(z)} \mathrm{d}_z F = \frac{1}{F(z)} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \mathrm{d}z + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \mathrm{d}\bar{z} \right) = \frac{1}{F(z)} F(z) \mathrm{d}z = \mathrm{d}z\,.$$

(b) Nach Anwenden der Koordinatentransformation $\boldsymbol{\frac{1}{z}}\colon z \mapsto \frac{1}{z}$ erhalten wir

$$\left(\boldsymbol{\tfrac{1}{z}}\right)^*(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} \left(-\frac{1}{z^2} \right) \mathrm{d}z = -\frac{1}{z^2 + 1} \mathrm{d}z\,,$$

was sich offensichtlich holomorph nach $z = 0$ fortsetzen lässt. Folglich lässt sich ω holomorph nach ∞ fortsetzen.
Es gelten $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + F^2$ und $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$. Also ist

$$(F^*(\omega))_z = \frac{1}{1 + (F(z))^2} \mathrm{d}_z F = \frac{1}{1 + (F(z))^2} (1 + (F(z))^2) \mathrm{d}z = \mathrm{d}z\,.$$

Aufgabe 2.

(a) Sei ω eine holomorphe 1-Form auf $\mathbb{P}^1$. Über $\mathbb{C}$ können wir $\omega = f\mathrm{d}z$ für eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ schreiben. Nach Anwenden der Koordinatentransformation $\boldsymbol{\frac{1}{z}}\colon z \mapsto \frac{1}{z}$ erhalten wir

$$\left(\boldsymbol{\tfrac{1}{z}}\right)^*(\omega) = f(\tfrac{1}{z})(-\tfrac{1}{z^2})\mathrm{d}z\,.$$

Also muss sich $f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}$ holomorph nach $z = 0$ fortsetzen lassen. Somit hat $f(\frac{1}{z})$ eine Nullstelle in $z = 0$ und folglich ist f eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$. Also ist f konstant und somit identisch 0, da f in ∞ eine Nullstelle hat.

(b) Zu jedem Punkt $a \in \mathbb{P}^1$ gibt es eine Umgebung U von $F(a)$ in $\mathbb{C}/\Lambda$, sodass auf U ein Inverses der Projektion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ existiert. Folglich gibt es auf $F^{-1}(U)$ einen Lift $\tilde{F}\colon F^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ von F. Das Differential $\mathrm{d}F = \mathrm{d}\tilde{F}$ ist unabhängig vom Lift, da die Differenz von je zwei Lifts konstant ist. Folglich ist $\mathrm{d}F$ eine global wohldefinierte holomorphe 1-Form auf $\mathbb{P}^1$. Nach Teil (a) ist somit $\mathrm{d}F$ identisch 0. Also ist F konstant.

(c) Offensichtlich ist $\mathrm{d}z$ eine nicht-verschwindende holomorphe 1-Form auf $\mathbb{C}/\Lambda$. Für jede andere holomorphe 1-Form ω auf $\mathbb{C}/\Lambda$ gibt es somit eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}$ mit $\omega = f\mathrm{d}z$. Da $\mathbb{C}/\Lambda$ kompakt ist, ist f konstant. Also ist $\Omega^1(\mathbb{C}/\Lambda)$ durch $\mathrm{d}z$ erzeugt und folglich 1-dimensional.

Aufgabe 3.

(a) Außerhalb der Polstellen von π ist π und somit auch $\mathrm{d}\pi$ holomorph. Da $\mathrm{d}(z^n) = nz^{n-1}\mathrm{d}z$ für all $n \in \mathbb{Z}$ gilt, hat $\mathrm{d}\pi$ eine Polstelle der Ordnung $n+1$ an allen Polstellen von π der Ordnung n. Weil π genau drei einfache Polstellen hat (vgl. Aufgabe 2 (a) von Übungsblatt 6), hat somit $\mathrm{d}\pi$ genau drei doppelte Polstellen, nämlich in $\pi^{-1}(\{\infty\})$.

Die Nullstellen von $\mathrm{d}\pi$ sind genau diejenigen Punkte, an denen die Ableitung von π verschwindet, also genau die Verzweigungspunkte von π. Dies sind genau die Punkte in $\pi^{-1}(\mathcal{S})$, wobei $\mathcal{S}$ die Menge der dritten Einheitswurzeln ist. Jede dieser Nullstellen ist doppelt, da die Verzweigungsordnung jeweils 2 ist (vgl. Aufgabe 2 (a) von Übungsblatt 6).

(b) In $\pi^{-1}(\{\infty\})$ hat f jeweils einfache Polstellen und sonst keine weiteren (da $f^3+\pi^3 = 1$ gilt). Folglich ist $\frac{1}{f^2}\mathrm{d}\pi$ holomorph in $\pi^{-1}(\{\infty\})$ mit Werten ungleich 0. Außerdem hat f genau dann eine Nullstelle, wenn $\pi^3 = 1$ gilt, also genau in den Punkten in $\pi^{-1}(\mathcal{S})$. Jede dieser Nullstellen ist einfach (wie man z. B. durch Ableiten von $f^3 + \pi^3 = 1$ herleiten kann). Folglich ist $\frac{1}{f^2}\mathrm{d}\pi$ holomorph fortsetzbar in $\pi^{-1}(\mathcal{S})$ mit Werten ungleich 0. Da außerhalb von $\pi^{-1}(\mathcal{S} \cup \{\infty\})$ sowohl f als auch $\mathrm{d}\pi$ holomorph und ohne Nullstellen sind, ist somit $\frac{1}{f^2}\mathrm{d}\pi$ eine holomorphe 1-Form ohne Nullstellen.

Aufgabe 4.

(a) Der Kern des Operators $\bar{\partial}\colon \mathcal{A}^{0,0}(X) \to \mathcal{A}^{0,1}(X)$ besteht genau aus den holomorphen Funktionen $X \to \mathbb{C}$. Da X kompakt ist, ist jede holomorphe Funktion konstant. Folglich ist $H^{0,0}(X) \cong \mathbb{C}$.

(b) Der Kern des Operators $\bar{\partial}\colon \mathcal{A}^{1,0}(X) \to \mathcal{A}^{1,1}(X)$ besteht genau aus den holomorphen 1-Formen. Folglich ist $H^{1,1}(X) \cong \Omega^1(X)$.

(c) Für eine 1-Form ω sei $\bar{\omega}$ folgendermaßen definiert: Lokal können wir $\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$ schreiben. Dann ist $\bar{\omega} := \bar{f}\mathrm{d}\bar{z} + \bar{g}\mathrm{d}z$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte. Ferner ist aus der Definition offensichtlich, dass wenn $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(X)$ ist, so ist $\bar{\omega} \in \mathcal{A}^{q,p}(X)$.

Sei nun $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$. Lokal können wir $\omega = f\mathrm{d}z$ schreiben. Dann ist

$$\omega \wedge \bar{\omega} = f\mathrm{d}z \wedge \bar{f}\mathrm{d}\bar{z} = |f|^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -2\mathrm{i}|f|^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,.$$

Da das Integral $\int |f|^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ immer positiv ist, außer f ist identisch 0, folgt, dass

$$\int_X \omega \wedge \bar{\omega} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 0\,.$$

Analog kann man diese Aussage für $\omega \in \mathcal{A}^{0,1}(X)$ zeigen. Folglich ist die bilineare Abbildung nicht-ausgeartet.

(d) Seien $\omega_1 \in H^{1,0}(X)$ und $[\omega_2] = 0 \in H^{0,1}(X)$. Dann ist $\bar\partial\omega_1 = 0$ und es gibt eine Funktion $f \in \mathcal{A}^0(X)$ mit $\bar\partial f = \omega_2$. Da $\omega_1 \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ ist, ist $\partial\omega_1 = 0$. Also ist $\mathrm{d}\omega_1 = \bar\partial\omega_1 = 0$. Außerdem ist $\omega_1 \wedge \partial f = 0$, da $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0$ gilt. Somit ist $\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \bar\partial f = \omega_1 \wedge \mathrm{d}f = -\mathrm{d}f \wedge \omega_1 = -\mathrm{d}(f\omega_1)$. Folglich ist

$$\int_X \omega_1 \wedge \omega_2 = -\int_X \mathrm{d}(f\omega_1) = 0\,.$$

Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung $H^{1,0}(X) \times H^{0,1}(X) \to \mathbb{C}$.
Die Injektivität von $H^{1,0}(X) \to H^{0,1}(X)^*$ folgt aus Teil (c), denn wenn $\omega \in H^{1,0}(X)$ ist, so ist $[\bar\omega] \in H^{0,1}(X)$ derart, dass $(\omega, \bar\omega) \mapsto 0$ genau dann, wenn $\omega = 0$.

(e) Die Abbildung ist wohldefiniert: Sei $[\omega] = 0 \in H^{1,1}(X)$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ mit $\bar\partial\alpha = \omega$. Da $\alpha \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ ist, ist $\partial\alpha = 0$. Also ist $\omega = \bar\partial\alpha = \mathrm{d}\alpha$. Folglich ist $\int_X \omega = \int_X \mathrm{d}\alpha = 0$.
Die Abbildung ist surjektiv: Auf einer Koordinate (U, z) können wir eine C^∞-Funktion f mit kompaktem Träger in U derart finden, dass f immer nicht-negative reelle Werte annimmt und an mindestens einem Punkt positiv ist. Dann betrachte $\omega = f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Außerhalb von U können wir ω mit 0 fortsetzen und erhalten $\omega \in \mathcal{A}^{1,1}(X)$ mit $\int_X \omega = \int_U f\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$.

Aufgabe 5.

(a) Dies folgt aus Teil (b) mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U(2)\,.$$

(b) Dass die Matrix in $U(2)$ liegt, ist äquivalent zu

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \quad \text{und} \quad \bar a b + \bar c d = 0\,.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} |az+b|^2 + |cz+d|^2 &= (az+b)(\bar a\bar z + \bar b) + (cz+d)(\bar c\bar z + \bar d) \\ &= (|a|^2 + |c|^2)|z|^2 + (a\bar b + c\bar d)z + (\bar a b + \bar c d)\bar z + (|b|^2 + |d|^2) \\ &= |z|^2 + 1\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} f^*(\omega_{\mathrm{FS}}) &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\bar\partial \log\left(1 + \left|\frac{az+b}{cz+d}\right|^2\right) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\bar\partial \log \frac{|cz+d|^2 + |az+b|^2}{|cz+d|^2} \\ &= \omega_{\mathrm{FS}} - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\bar\partial \log(|cz+d|^2)\,. \end{aligned}$$

Betrachte ferner die Abbildung $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto cz + d$. Es ist

$$\partial\bar{\partial}\log(|cz+d|^2) = g^*(\partial\bar{\partial}\log|z|^2) = g^*(\partial(\tfrac{z}{|z|^2}\mathrm{d}\bar{z})) = g^*(\partial(\tfrac{1}{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z})) = g^*(0) = 0\,.$$

Also gilt in der Tat $f^*(\omega_{\mathrm{FS}}) = \omega_{\mathrm{FS}}$.

(c) Sei $\varphi_t\colon \mathbb{C} \to [0,\infty)$ eine C^∞-Funktion, sodass $\varphi_t(z) = 1$, falls $|z| \le t$, und $\varphi_t(z) = 0$, falls $|z| \ge 2t$. Dann ist $(\varphi_t, 1 - \varphi_t \circ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}})$ eine Partition der Eins bezüglich (U_1, U_0). Wir erhalten

$$\int_X \omega_{\mathrm{FS}} = \int_{\mathbb{C}} \varphi_t\omega_{\mathrm{FS}} + \int_{\mathbb{C}} (1 - \varphi_t \circ \tfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}})(\tfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}})^*(\omega_{\mathrm{FS}})\,.$$

Im Grenzwert $t \to \infty$ konvergiert das zweite Integral gegen 0 und folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_X \omega_{\mathrm{FS}} = \int_{\mathbb{C}} \omega_{\mathrm{FS}} &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}\theta\, r\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \frac{2r}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1\,.
\end{aligned}$$