Übungsblatt 6 – Lösungen

Aufgabe 1.
Sei (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^2 + z^{2g+2} - 1 \in \mathbb{C}(z)[T]$. Wie in der Vorlesung gesehen hat die Überlagerung $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ genau $2g+2$ Verzweigungspunkte (über den Nullstellen von $z^{2g+2} - 1$), jeweils mit Verzweigungsordnung 1. Die Formel von Riemann–Hurwitz impliziert folglich für das Geschlecht g_X von X:

$$2g_X - 2 = 2 \cdot (2 \cdot 0 - 2) + (2g + 2) \cdot 1\,,$$

also $g_X = g$.

Aufgabe 2.

(a) Sei $\mathcal{S}$ die Menge der dritten Einheitswurzeln, d. h. die Menge der Nullstellen von $z^3 - 1$. Die Werte der Verzweigungspunkte sind in der Menge $\mathcal{S} \cup \{\infty\}$ enthalten (vgl. den Fall $T^2 - P(z)$ in der Vorlesung). Analog zur Vorlesung erhält man, dass über jedem Punkt in $\mathcal{S}$ genau ein Verzweigungspunkt der Verzweigungsordnung 2 liegt. Außerdem erhält man analog (da sowohl T^3 als auch $z^3 - 1$ jeweils vom Grad 3 sind), dass es keinen Verzweigungspunkt über ∞ gibt. Folglich gibt es genau 3 Verzweigungspunkte auf X, nämlich die Punkte in $\pi^{-1}(\mathcal{S})$.

(b) Da $f^3 + \pi^3 = 1$ gilt, haben f und π die gleichen Polstellen. Ferner haben wir

$$1 = f^3 + \pi^3 = (f + \pi)(f^2 - f \cdot \pi + \pi^2) = (f + \pi)((f + \pi)^2 - 3(f \cdot \pi))\,.$$

Eine Nullstelle von $f + \pi$ muss folglich eine Polstelle von $(f + \pi)^2 - 3(f \cdot \pi)$ und somit eine Polstelle von $f \cdot \pi$ sein, also eine Polstelle sowohl von f als auch von π. Eine Polstelle von $f + \pi$ muss eine Nullstelle von $(f + \pi)^2 - 3(f \cdot \pi)$ und somit eine Polstelle von $f \cdot \pi$ sein, also eine Polstelle sowohl von f als auch von π. Somit liegen die Null- und Polstellen von $f + \pi$ in $\pi^{-1}(\{\infty\})$. Wie in Teil (a) gesehen, besteht $\pi^{-1}(\{\infty\})$ aus genau 3 Punkten.
Sei $\zeta := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$ eine dritte Einheitswurzel. Für $k = 0, 1, 2$ sei g_k derjenige Zweig von $\sqrt[3]{\cdot}$, für den $g_k(z^3) = \zeta^k z$ gilt. Dann gilt

$$g_k\Big(1 - \big(\tfrac{1}{z}\big)^3\Big) + \tfrac{1}{z} = \frac{\zeta^k \cdot g_0(z^3 - 1) + 1}{z}$$

Im Grenzwert $z \to 0$ erhalten wir für den Zähler den Wert $\zeta^k \cdot (-1) + 1$. Dieser Wert ist gleich 0 für $k = 0$ und ungleich 0 für $k = 1, 2$. Somit haben wir genau eine Nullstelle und genau zwei Polstellen in $\pi^{-1}(\{\infty\})$. Die Polstellen sind jeweils einfach und somit ist die Nullstelle doppelt.

(c) Zu gegebenem z seien $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ die drei Lösungen von $\zeta^3 = 1 - z^3$. Dann gelten $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0$, $\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_2\zeta_3 = 0$ und $\zeta_1\zeta_2\zeta_3 = 1 - z^3$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} c_1 &= (\zeta_1 + z) + (\zeta_2 + z) + (\zeta_3 + z) = 3z\,, \\ c_2 &= (\zeta_1 + z)(\zeta_2 + z) + (\zeta_1 + z)(\zeta_3 + z) + (\zeta_2 + z)(\zeta_3 + z) = 3z^2 \quad \text{und} \\ c_3 &= (\zeta_1 + z)(\zeta_2 + z)(\zeta_3 + z) = 1\,. \end{aligned}$$

Folglich ist $f + \pi$ Lösung von $T^3 - 3zT^2 + 3z^2T - 1$. Zur Kontrolle:

$$\begin{aligned} &(f+\pi)^3 - 3\pi \cdot (f+\pi)^2 + 3\pi^2 \cdot (f+\pi) - 1 \\ &= f^3 + 3f^2\pi + 3f\pi^2 + \pi^3 - 3f^2\pi - 6f\pi^2 - 3\pi^3 + 3f\pi^2 + 3\pi^3 - 1 \\ &= f^3 + \pi^3 - 1 = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.
Sei $\mathcal{S}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln, d. h. die Menge der Nullstellen von $z^n - 1$. Analog zu Aufgabe 2 (a) kann man zeigen, dass über jedem Punkt in $\mathcal{S}$ genau ein Verzweigungspunkt liegt, jeweils mit Verzweigungsordnung $n - 1$, und dass es keine weiteren Verzweigungspunkte gibt (auch nicht ∞, da sowohl T^n als auch $z^n - 1$ jeweils den Grad n haben). Die Formel von Riemann–Hurwitz ergibt folglich

$$2g - 2 = n \cdot (2 \cdot 0 - 2) + n \cdot (n-1)\,,$$

d. h. es gilt

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,.$$

Aufgabe 4.

(a) Sei X wie in Aufgabe 1 vom Übungsblatt 4 definiert. Sei ferner $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$, $[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_1 : z_0]$. Dann ist π eine zweiblättrige Überlagerung. Außerdem sei $f\colon X \to \mathbb{P}^1$, $[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_2 : z_0^4]$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f^2([z_0 : z_1 : z_2]) &= [z_2 : z_0^4]^2 = [z_2^2 : z_0^8] \quad \text{und} \\ \pi^8([z_0 : z_1 : z_2]) &= [z_1 : z_0]^8 = [z_1^8 : z_0^8]\,, \end{aligned}$$

und folglich

$$(f^2 + \pi^8 + 1)([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_2^2 + z_1^8 + z_0^8 : z_0^8] = [0 : z_0^8] = 0$$

für $[z_0 : z_1 : z_2] \in X$ mit $z_0 \neq 0$. Folglich gilt $f^2 + \pi^8 + 1 = 0$ und somit ist (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^2 + z^8 + 1$.

(b) Sei $\pi\colon Y \to \mathbb{P}^1$, $[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^2 - z_1^2 : z_0 z_1]$. Man beachte, dass diese Abbildung in der Tat invariant unter ρ ist und folglich eine meromorphe Funktion auf Y definiert. Außerdem ist π eine vierblättrige Überlagerung $X \to \mathbb{P}^1$ (zur Gleichung $[z_0^2 - z_1^2 : z_0 z_1] = [x : y]$ gibt es genau zwei Lösungen $[z_0 : z_1]$ und dazu wiederum genau je zwei Lösungen z_2). Somit ist π eine zweiblättrige Überlagerung $Y \to \mathbb{P}^1$. Weiter sei $\tilde{f}\colon Y \to \mathbb{P}^1$, $[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^4 - z_1^4 : z_2]$. Auch diese Funktion ist invariant unter ρ und folglich wohldefiniert. Wir berechnen

$$\tilde{f}^2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^8 - 2(z_0 z_1)^4 + z_1^8 : z_2^2]\,.$$

Also ist

$$(\tilde{f}^2 + 1)([z_0 : z_1 : z_2]) = [2(z_0 z_1)^4 : z_0^8 + z_1^8]\,.$$

Außerdem ist

$$\pi^2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^4 - 2(z_0 z_1)^2 + z_1^4 : (z_0 z_1)^2] = [z_0^4 + z_1^4 : (z_0 z_1)^2] - 2\,.$$

Somit ist

$$(\pi^2 + 2)^2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^8 + 2(z_0 z_1)^4 + z_1^8 : (z_0 z_1)^4] = [z_0^8 + z_1^8 : (z_0 z_1)^4] + 2\,.$$

Also gilt

$$\tilde{f}^2 + 1 = \frac{2}{(\pi^2 + 2)^2 - 2}\,.$$

Ersetzen wir $\tilde{f}$ durch $\hat{f} := \tilde{f} \cdot ((\pi^2 + 2)^2 - 2)$, so erhalten wir

$$\hat{f}^2 = ((\pi^2 + 2)^2 - 2)(2 - ((\pi^2 + 2)^2 - 2)) = -(\pi^4 + 4\pi^2 + 2)(\pi^4 + 4\pi^2)\,.$$

Ersetzen wir $\hat{f}$ durch $f := \frac{\hat{f}}{\pi}$, so erhalten wir

$$f^2 + (\pi^6 + 8\pi^4 + 18\pi^2 + 8) = 0\,.$$

Also ist (Y, π, f) die algebraische Funktion von $T^2 + P(z)$, wobei

$$P(z) := z^6 + 8z^4 + 18z^2 + 8\,.$$

Dieses Polynom ist separabel, da P und P' keine gemeinsame Nullstelle haben. Explizit können wir f angeben als

$$f([z_0 : z_1 : z_2]) = [-(z_0^2 + z_1^2) z_2 : (z_0 z_1)^3]\,.$$

Aufgabe 5.
Zunächst einmal existiert eine nicht-konstante meromorphe Funktion π von X, denn es gibt nach Voraussetzung eine meromorphe Funktion, die verschiedene Werte an zwei beliebig gewählten Punkten annimmt. Sei diese eine n-blättrige Überlagerung $X \to \mathbb{P}^1$. Insbesondere ist $\mathcal{M}(X)$ eine endliche Körpererweiterung von $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$, und somit existiert ein $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)(f)$. Insbesondere erfüllt f eine Gleichung $\tilde{P}(f) = 0$ für ein Polynom $\tilde{P} \in \mathbb{C}(z)[T]$ vom Grad n. Durch Zerlegen von $\tilde{P}$ in irreduzible Polynome erhalten wir ein irreduzibles Polynom $P \in \mathbb{C}(z)[T]$ mit $P(f) = 0$ vom Grad kleiner gleich n.

Angenommen, der Grad von P sei echt kleiner als n. Sei $a \in \mathbb{P}^1$ kein Verzweigungspunkt von π. Dann besteht $\pi^{-1}(\{a\})$ aus genau n verschiedenen Punkten $a_1, \dots, a_n$. Andererseits erfüllt f eine polynomielle Gleichung vom Grad echt kleiner als n. Somit sind nicht alle Werte $f(a_1), \dots, f(a_n)$ verschieden, denn ein Polynom vom Grad k hat maximal k verschiedene Nullstellen. Seien also $i \neq j$ derart, dass $f(a_i) = f(a_j)$. Da außerdem $\pi(a_i) = \pi(a_j)$ gilt, gilt folglich $g(a_i) = g(a_j)$ für alle $g \in \mathbb{C}(\pi, f)$. Nach Konstruktion von f ist aber $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)(f)$, also gilt $g(a_i) = g(a_j)$ für alle $g \in \mathcal{M}(X)$ – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Folglich hat P den Grad n und (X, π, f) ist die algebraische Funktion von $(\mathbb{P}^1, P)$. Da $\mathcal{M}(X)$ und $\mathcal{M}(Y)$ isomorph sind, ist somit auch $(Y, \tilde{\pi}, \tilde{f})$ die algebraische Funktion von $(\mathbb{P}^1, P)$, wobei $\tilde{\pi}$ und $\tilde{f}$ diejenigen Elemente von $\mathcal{M}(Y)$ sind, auf welche π und f unter dem Isomorphismus $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(Y)$ abgebildet werden. Da die algebraische Funktion bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sind folglich X und Y biholomoph.

Aufgabe 6.
Das Bild der Abbildung ist offensichtlich in der angegebenen Menge enthalten, wie wir in Aufgabe 3 (e) vom Übungsblatt 3 gesehen haben (auch der Punkt $[0 : 0 : 1]$ erfüllt offensichtlich die Gleichung).

Sei nun $[z_0 : z_1 : z_2]$ in der angegebenen Menge gegeben. Falls $z_0 = 0$, so gilt $4z_1^3 = 0$, also auch $z_1 = 0$ und folglich $[z_0 : z_1 : z_2] = [0 : 0 : 1]$. Andernfalls kann o. B. d. A. $z_0 = 1$ gewählt werden. Wir wissen, dass $\wp\colon \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{C}$ surjektiv ist, da $\wp\colon \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1$ surjektiv ist und die Punkte in Λ genau die Polstellen sind. Also gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\wp(z) = z_1$. Dann erfüllen sowohl z_2 als auch $\wp'(z)$ die angegebene Gleichung, sodass entweder $\wp'(z) = z_2$ oder $\wp'(z) = -z_2$ gilt. Im ersten Fall ist $[z_0 : z_1 : z_2] = [1 : \wp(z) : \wp'(z)]$ und im zweiten Fall ist $[z_0 : z_1 : z_2] = [1 : \wp(-z) : \wp'(-z)]$, da $\wp(-z) = \wp(z)$ und $\wp'(-z) = -\wp'(z)$ gelten. Dies zeigt die Surjektivität der Abbildung.

Falls $[1 : \wp(z) : \wp'(z)] = [1 : \wp(w) : \wp'(w)]$ ist, so gelten $\wp(z) = \wp(w)$ und $\wp'(z) = \wp'(w)$. Da $\wp\colon \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1$ eine zweiblättrige Überlagerung ist und $\wp(z) = \wp(-z)$ gilt, gilt somit $z = w \mod \Lambda$ oder $z = -w \mod \Lambda$. Im ersten Fall ist $[z] = [w]$. Im zweiten Fall haben wir außerdem, dass $\wp'(z) = \wp'(w) = \wp'(-z) = -\wp'(z)$ gilt. Also ist $2z \in \Lambda$, wie wir in Aufgabe 3 (d) vom Übungsblatt 3 gesehen haben. Folglich ist $[z] = [-z] = [w]$. Dies zeigt die Injektivität der Abbildung.