Übungsblatt 5 – Lösungen

Aufgabe 1.
Sei zunächst $(\hat{X}, \pi, \hat{f}, \hat{a})$ eine maximale analytische Fortsetzung. Dann können wir $\hat{X}$ mit $|\mathcal{O}_X|_\varphi$ identifizieren. Nach Definition ist dann aber $\pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_z)$ gleich $z \in |\mathcal{O}_X|_\varphi$. Folglich sind die Keime $\pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{a}_1})$ und $\pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{a}_2})$ verschieden.

Umgekehrt seien nun die Keime $\pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{a}_1})$ und $\pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{a}_2})$ verschieden. Durch analytische Fortsetzung erhalten wir, dass auch für jedes Paar $(b_1, b_2) \in \hat{X}^2$ mit $\pi(b_1) = \pi(b_2)$ und $b_1 \neq b_2$ die Keime $\pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{b}_1})$ und $\pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{b}_2})$ verschieden sind. Somit ist die Abbildung $F\colon \hat{X} \to |\mathcal{O}_X|$, $z \mapsto \pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_z)$ injektiv. Da $\hat{X}$ zusammenhängend ist, ist das Bild folglich in $|\mathcal{O}_X|_\varphi$ enthalten. Weil $\pi\colon \hat{X} \to X$ eine unverzweigte Überlagerung ist, ist das Bild gleich $|\mathcal{O}_X|_\varphi$. Dies folgt aus der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung entlang einer Kurve, denn jede Kurve $\tilde{u}\colon I \to |\mathcal{O}_X|_\varphi$ projiziert eine Kurve $u\colon I \to X$, welche einen Lift $\hat{u}\colon I \to \hat{X}$ hat. Dies zeigt, dass $(\hat{X}, \pi, \hat{f}, \hat{a})$ mit der maximalen analytischen Fortsetzung $|\mathcal{O}_X|_\varphi$ identifiziert werden kann und folglich selbst eine maximale analytische Fortsetzung ist.

Aufgabe 2.
Sei $b \in X$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es eine Kurve $u\colon I \to X$ mit $u(0) = a$ und $u(1) = b$. Nach Voraussetzung hat φ eine analytische Fortsetzung entlang u. Sei also $\psi \in \mathcal{O}_b$ die analytische Fortsetzung von φ entlang u. Dann existiert ein Lift $\hat{u}\colon I \to |\mathcal{O}_X|$ von u, sodass $\hat{u}(0) = \varphi$ und $\hat{u}(1) = \psi$. Insbesondere liegt ψ in der gleichen Zusammenhangskomponente von $|\mathcal{O}_X|$ wie φ. Folglich ist b im Bild der Abbildung $|\mathcal{O}_X|_\varphi \to X$ enthalten. Da b beliebig war, ist somit $|\mathcal{O}_X|_\varphi \to X$ surjektiv. Da $|\mathcal{O}_X|_\varphi$ eine maximale analytische Fortsetzung ist und die maximale analytische Fortsetzung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, ist folglich $\hat{X} \to X$ eine Überlagerung.

Aufgabe 3.
Wir zeigen zunächst, dass $(\hat{X}, f, \mathrm{Id}_{\hat{X}}, \hat{a})$ eine analytische Fortsetzung darstellt: Nach Voraussetzung ist $f\colon \hat{X} \to X$ eine unverzweigte holomorphe Abbildung. Des Weiteren ist $\mathrm{Id}_{\hat{X}} \in \mathcal{O}(\hat{X})$ und es gilt $f(\hat{a}) = a$. Außerdem ist

$$(f|_{\hat{U}})^*((f|_{\hat{U}})^{-1}) = (f|_{\hat{U}})^{-1} \circ (f|_{\hat{U}}) = \mathrm{Id}_{\hat{X}}|_{\hat{U}}\,.$$

Die analytische Fortsetzung $(\hat{X}, f, \mathrm{Id}_{\hat{X}}, \hat{a})$ ist maximal: Dies folgt aus Aufgabe 1, denn wenn $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in f^{-1}(\{a\})$ verschieden sind, so sind auch die Keime $f_*((\mathbf{Id}_{\hat{X}})_{\hat{a}_1})$ und $f_*((\mathbf{Id}_{\hat{X}})_{\hat{a}_2})$ verschieden, da $\mathrm{Id}_{\hat{X}}(\hat{a}_1) = \hat{a}_1 \neq \hat{a}_2 = \mathrm{Id}_{\hat{X}}(\hat{a}_2)$.

Aufgabe 4.

(a) Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \mathrm{e}^z$ ist eine unverzweigte holomorphe Überlagerung. Da der Logarithmus die Umkehrabbildung von exp ist, folgt aus Aufgabe 3, dass $(\mathbb{C}, \exp, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, 0)$ eine maximale analytische Fortsetzung darstellt. Folglich ist $\hat{X}$ biholomorph zu $\mathbb{C}$, da die maximale analytische Fortsetzung bis auf Biholomorphie eindeutig bestimmt ist.

(b) Die Abbildung $\boldsymbol{z^k} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^k$ ist eine unverzweigte holomorphe Überlagerung. Da die k-te Wurzel die Umkehrabbildung von $\boldsymbol{z^k}$ ist, folgt aus Aufgabe 3, dass $(\mathbb{C}^*, \boldsymbol{z^k}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}, 1)$ eine maximale analytische Fortsetzung darstellt. Folglich ist $\hat{X}$ biholomorph zu $\mathbb{C}^*$, da die maximale analytische Fortsetzung bis auf Biholomorphie eindeutig bestimmt ist.

(c) Sei
$$\pi(z) := \frac{z^2+1}{2z}\,.$$
Offensichtlich sind 0 und ∞ die einzigen Polstellen dieser rationalen Funktion (beide einfach). Insbesondere stellt π eine zweiblättrige, verzweigte Überlagerung $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ dar. Für die Ableitung gilt
$$\pi'(z) = \frac{z^2-1}{2z^2}\,.$$
Die Nullstellen von π' sind folglich die Punkte ± 1. Außerdem ist $\pi(\pm 1) = \pm 1$. Somit stellt π eine unverzweigte holomorphe Überlagerung $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\} \to \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ dar. Des Weiteren gilt
$$\pi^*\Big(\sqrt{1-z^2}\Big) = \sqrt{1-(\pi(z))^2} = \sqrt{1-\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \sqrt{-\left(\frac{z^2-1}{2z}\right)^2} = \pm\mathrm{i}\,\frac{z^2-1}{2z}\,.$$
Folglich stellt $(\mathbb{C}\setminus\{0,\pm 1\}, \pi, \hat{f}, \mathrm{i})$ eine analytische Fortsetzung der Funktion $\sqrt{1-z^2}$ dar, wobei
$$\hat{f}(z) := -\mathrm{i}\,\frac{z^2-1}{2z}\,.$$
Diese ist maximal nach Aufgabe 1, da π eine zweiblättrige Überlagerung ist und $\pi(\mathrm{i}) = \pi(-\mathrm{i}) = 0$ und $\hat{f}(\mathrm{i}) = 1 \neq -1 = \hat{f}(-\mathrm{i})$ gelten.