Übungsblatt 4 – Lösungen

Aufgabe 1.

(a) X ist kompakt als Bild der kompakten Teilmenge

$$\{(z_0, z_1, z_2) \in W : |z_0|^8 + |z_1|^8 + |z_2|^2 = 1\}$$

unter der stetigen Projektion $\pi : W \to W/\sim$. Die Mengen U_i sind offen, da die Urbilder $\pi^{-1}(U_i)$ offen in W sind.
Die Abbildungen

$$\pi^{-1}(U_0 \cap U_2) \to \mathbb{C}\,,\ (z_0, z_1, z_2) \mapsto \frac{z_1^4}{z_2} \quad \text{und} \quad \pi^{-1}(U_0 \cap U_1) \to \mathbb{C}\,,\ (z_0, z_1, z_2) \mapsto \frac{z_2}{z_1^4}$$

sind stetig. Folglich ist auch $\pi^{-1}(U_0) \to \mathbb{P}^1$, $(z_0, z_1, z_2) \mapsto [z_1^4 : z_2]$ stetig und somit auch φ_0. Da die Abbildungen $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^4$ und $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^8$ lokale Homöomorphismen sind, gibt es folglich lokal ein stetiges Inverses der Abbildung $\pi^{-1}(U_0) \to \mathbb{C}^2$, $(z_0, z_1, z_2) \mapsto (z_1^4, z_2)$, nämlich

$$(z_0, z_1, z_2) = \left(\sqrt[8]{-z_1^8 - z_2^2}, \sqrt[4]{z_1^4}, z_2\right).$$

Somit ist φ_0 ein lokaler Homöomorphismus. Analog kann man zeigen, dass auch φ_1 und φ_2 lokale Homöomorphismen sind.
Die (lokal definierten) Abbildungen

$$\begin{aligned} &[z_1^4 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^4 : z_2]\,, \\ &[z_1^4 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1] \quad \text{und} \\ &[z_0^4 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1] \end{aligned}$$

sind lokal biholomorph, da die Abbildungen $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^k$ lokal biholomorph sind. Folglich stimmen die durch φ_0, φ_1 und φ_2 definierten komplexen Strukturen auf den Schnitten $U_0 \cap U_1$, $U_0 \cap U_2$ und $U_1 \cap U_2$ überein, sodass auf ganz X eine eindeutige komplexe Struktur definiert wird, sodass φ_0, φ_1 und φ_2 holomorph sind.

(b) Die Abbildung φ_2 ist eine zweifache Überlagerung, da es zu gegeben $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ mit $z_0^8 + z_1^8 \neq 0$ genau zwei $z_2 \in \mathbb{C}$ gibt mit $z_0^8 + z_1^8 + z_2^2 = 0$. Die Menge $X \setminus U_2$ besteht aus jenen Punkten $[z_0 : z_1 : 0]$ mit $z_0^8 + z_1^8 = 0$, d. h. es gilt $(\frac{z_0}{z_1})^8 = -1$. Folglich gibt es genau 8 Verzweigungspunkte (für jene Punkte gibt es nur ein $z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_0^8 + z_1^8 + z_2^2 = 0$, nämlich $z_2 = 0$). Die Formel von Riemann–Hurwitz impliziert für das Geschlecht g_X von X folglich

$$2g_X - 2 = 2 \cdot (2 \cdot 0 - 2) + 8 \cdot 1\,,$$

d. h. $g_X = 3$.

(c) ρ ist in der Tat eine Involution:

$$(\rho \circ \rho)([z_0 : z_1 : z_2]) = \rho([-z_1 : z_0 : -z_2]) = [-z_0 : -z_1 : z_2] = [z_0 : z_1 : z_2]\,,$$

da $(-1)^4 = 1$.
ρ ist fixpunktfrei: Sei $[-z_1 : z_0 : -z_2] = [z_0 : z_1 : z_2]$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ mit $-z_1 = \lambda z_0$, $z_0 = \lambda z_1$ und $-z_2 = \lambda^4 z_2$. Somit gilt $z_0 = \lambda z_1 = -\lambda^2 z_0$. Folglich ist sowohl $\lambda^2 = -1$ als auch $\lambda^4 = -1$ (da $z_0, z_2 \neq 0$, weil $(z_0, z_1, z_2) \neq (0,0,0)$ und $z_0^8 + z_1^8 + z_2^2 = 0$) – Widerspruch.
ρ ist holomorph: Seien

$$\begin{aligned}\tau_1 &\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\,, \quad [z_0 : z_1] \mapsto [-z_0 : z_1] \quad \text{und}\\ \tau_2 &\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\,, \quad [z_0 : z_1] \mapsto [-z_1 : z_0]\,.\end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind offensichtlich holomorph. Nun gilt

$$\begin{aligned}(\varphi_0 \circ \rho)([z_0 : z_1 : z_2]) &= [z_0^4 : -z_2] = \tau_1([z_0^4 : z_2]) = (\tau_1 \circ \varphi_1)([z_0 : z_1 : z_2])\,,\\ (\varphi_1 \circ \rho)([z_0 : z_1 : z_2]) &= [z_1^4 : -z_2] = \tau_1([z_1^4 : z_2]) = (\tau_1 \circ \varphi_0)([z_0 : z_1 : z_2]) \quad \text{und}\\ (\varphi_2 \circ \rho)([z_0 : z_1 : z_2]) &= [-z_1 : z_0] = \tau_2([z_0 : z_1]) = (\tau_2 \circ \varphi_2)([z_0 : z_1 : z_2])\,.\end{aligned}$$

Die Abbildungen $\varphi_i \circ \rho$ für $i = 0,1,2$ sind somit holomorph als Verkettung von holomorphen Abbildungen. Folglich ist auch ρ holomorph.
Für $x \in X$ sei $\varphi_x \colon U_x \to \mathbb{C}$ eine Karte. Indem wir U_x verkleinern, falls nötig, können wir annehmen, dass $\rho(y) \notin U_x$ für alle $y \in U_x$. Das heißt, dass U_x durch π bijektiv auf $\pi(U_x)$ in Y abgebildet wird. Somit ist $\varphi_x \circ \pi^{-1} \colon \pi(U_x) \to \mathbb{C}$ eine Karte auf Y. Diese Karten sind verträglich, da ρ biholomorph ist (wenn $\varphi_x \colon U_x \to \mathbb{C}$ eine Karte ist, so ist auch $\varphi_x \circ \rho \colon \rho(U_x) \to \mathbb{C}$ eine Karte).
Für das Geschlecht g_Y von Y gilt:

$$2 \cdot (2g_Y - 2) = 2g_X - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4\,,$$

also $g_Y = 2$.

Aufgabe 2.
Es gilt $p'(z) = 3z^2 - 3 \neq 0$ für alle $z \neq \pm 1$. Außerdem ist $p(\pm 1) = \mp 2 = p(\mp 2)$. Folglich hat das Polynom $z^3 - 3z - c$ für $c \in Y$ genau drei einfache Nullstellen, welche alle in X liegen. Mit anderen Worten: die Abbildung $p \colon X \to Y$, welche offensichtlich holomorph ist, ist eine unverzweigte, 3-blättrige Überlagerung.

Sei nun $f \colon X \to X$ eine Decktransformation. Wir haben $X \cong \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm 1, \pm 2, \infty\}$ und $Y \cong \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm 1, \infty\}$. Folglich lässt sich f holomorph fortsetzen zu einer Abbildung $F \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ (da die Überlagerung $p \colon X \to Y$ eigentlich ist). Weil ferner $f \colon X \to X$

biholomorph ist, ist auch $F\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ biholomorph. Insbesondere gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

gilt (Aufgabe 3 (b) vom Übungsblatt 2). Da f eine Decktransformation ist, gilt somit

$$\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^3 - 3 \cdot \frac{az+b}{cz+d} = z^3 - 3z\,,$$

also

$$(az+b)^3 - 3(az+b)(cz+d)^2 = (z^3-3z)(cz+d)^3\,.$$

Der Vergleich des Koeffizienten von z^6 ergibt $c^3 = 0$, also $c = 0$. O. B. d. A. kann somit $d = 1$ angenommen werden. Also ist

$$(az+b)^3 - 3(az+b) = z^3 - 3z\,.$$

Der Vergleich des Koeffizienten von z^3 ergibt $a^3 = 1$, also $a \neq 0$. Der Vergleich des Koeffizienten von z^2 ergibt $3a^2 b = 0$ und somit $b = 0$. Der Vergleich des Koeffizienten von z ergibt nun $-3a = -3$, also $a = 1$. Somit ist $f(z) = z$ und folglich

$$\mathrm{Deck}(X/Y) = \{\mathrm{Id}\}\,.$$

Aufgabe 3.
Angenommen, f habe m Polstellen und g habe n Polstellen (jeweils mit Vielfachheit gezählt). Sei ferner $d := m + n$. Seien nun $z_1, \ldots, z_{d^2+2d} \in X$ beliebige verschiedene Punkte auf X, in welchen weder f noch g einen Pol habe. Betrachte die folgende $(d^2+2d) \times (d^2+2d+1)$-Matrix:

$$H_{\ell, j(d+1)+k+1} := f(z_\ell)^j g(z_\ell)^k$$

für $\ell = 1, \ldots, d^2+2d$ und $j, k = 0, \ldots, d$. Da diese Matrix mehr Spalten als Zeilen hat, gibt es $(a_{jk}) \in \mathbb{C}^{(d+1)\times(d+1)}$ (nicht alle a_{jk} gleich 0), sodass

$$\sum_{j,k=0}^{d} H_{\ell, j(d+1)+k+1} a_{jk} = 0$$

für alle $\ell = 1, \ldots, d^2+2d$ gilt. Mit anderen Worten: Die Funktion $h\colon X \to X$,

$$h(z) := \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{d} a_{jk} f(z)^j g(z)^k$$

hat mindestens die (d^2+2d) verschiedenen Nullstellen $z_1, \ldots, z_{d^2+2d}$.

Andererseits muss jede Polstelle von h schon Polstelle von f oder g sein. Seien $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N \in X$ diejenigen Punkte, in denen f oder g eine Polstelle hat. Sei ferner m_ℓ die Ordnung der Polstelle von f in $\tilde{z}_\ell$, falls f dort einen Pol hat, und 0 andernfalls. Analog sei n_ℓ für g definiert. Dann ist die Ordnung der Polstelle $\tilde{z}_\ell$ von $f(z)^j g(z)^k$ (falls diese Funktion in $\tilde{z}_\ell$ eine Polstelle hat) maximal $m_\ell j + n_\ell k \le (m_\ell + n_\ell)d$. Somit ist die Anzahl der Polstellen von h mit Vielfachheit gezählt maximal $\sum_{\ell=1}^N (m_\ell + n_\ell)d = (m+n)d = d^2$, weil $\sum_{\ell=1}^N m_\ell = m$ und $\sum_{\ell=1}^N n_\ell = n$ gelten.

Da h mehr Nullstellen als Polstellen hat und X kompakt ist, ist h folglich identisch 0. Mit anderen Worten: das Polynom

$$P(Z,W) := \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^d a_{jk} Z^j W^k$$

erfüllt die Bedingung $P(f,g) = 0$.