Übungsblatt 2 – Lösungen

Aufgabe 1.
Die Abbildung f^* ist offensichtlich ein Ringmorphismus:

$$f^*(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)\circ f = \varphi\circ f + \psi\circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi) \quad \text{und}$$
$$f^*(\varphi\cdot\psi) = (\varphi\cdot\psi)\circ f = (\varphi\circ f)\cdot(\psi\circ f) = f^*(\varphi)\cdot f^*(\psi)\,.$$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{O}(Y)$ mit $f^*(\varphi) = 0$ gegeben. Dann ist insbesondere φ identisch 0 auf dem Bild $f(X)$. Da f nicht-konstant ist, ist $f(X)$ offen. Folglich ist $\varphi = 0$ nach dem Identitätssatz. Da φ beliebig war, ist somit f^* injektiv.

Aufgabe 2.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass f in einem der Punkte $p_1, \ldots, p_n$ eine wesentliche Singularität hat. In diesem Fall folgt die Aussage aus dem Satz von Casorati–Weierstraß.

Andernfalls ist f eine meromorphe Funktion auf X und kann somit als eine holomorphe Abbildung $F\colon X \to \mathbb{P}^1$ betrachtet werden. Da X kompakt ist und F nicht-konstant, ist folglich F surjektiv. Die Aussage folgt, da $\{p_1, \ldots, p_n\}$ endlich ist.

Aufgabe 3.

(a) Die holomorphe Struktur auf $\mathbb{P}^1$ ist gegeben durch die Karten $\varphi_0\colon U_0 \to \mathbb{C}$, $[z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0}$ und $\varphi_1\colon U_1 \to \mathbb{C}$, $[z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1}$, wobei $U_i := \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1 : z_i \neq 0\}$ für $i = 0, 1$. Betrachte

$$F\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\,, \quad [z_0 : z_1] \mapsto [az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1]\,.$$

In den Karten φ_i haben wir

$$F_{00}(z) = (\varphi_0 \circ F \circ (\varphi_0)^{-1})(z) = (\varphi_0 \circ F)([1 : z]) = \varphi_0([a + bz : c + dz]) = \frac{c+dz}{a+bz}\,,$$
$$F_{01}(z) = (\varphi_1 \circ F \circ (\varphi_0)^{-1})(z) = (\varphi_1 \circ F)([1 : z]) = \varphi_1([a + bz : c + dz]) = \frac{a+bz}{c+dz}\,,$$
$$F_{10}(z) = (\varphi_0 \circ F \circ (\varphi_1)^{-1})(z) = (\varphi_0 \circ F)([z : 1]) = \varphi_0([az + b : cz + d]) = \frac{cz+d}{az+b}\,,$$
$$F_{11}(z) = (\varphi_1 \circ F \circ (\varphi_1)^{-1})(z) = (\varphi_1 \circ F)([z : 1]) = \varphi_1([az + b : cz + d]) = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Die Funktionen F_{ij} sind offensichtlich holomorph auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen (man beachte, dass $(a, b), (c, d) \neq (0, 0)$, da $ad - bc \neq 0$). Folglich ist F eine holomorphe Abbildung. Insbesondere definiert F eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$. Darüber hinaus gilt

$$(\varphi_1 \circ F \circ (\varphi_1)^{-1})(z) = (\varphi_1 \circ F)([z : 1]) = \varphi_1([az + b : cz + d]) = \frac{az+b}{cz+d} = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$. Also ist F eine meromorphe Fortsetzung von f. Die inverse Funktion ist gegeben durch

$$F^{-1}\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\,, \quad [z_0 : z_1] \mapsto [dz_0 - bz_1 : -\,cz_0 + az_1]\,,$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}(F^{-1} \circ F)([z_0 : z_1]) &= F^{-1}([az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1]) \\ &= [d(az_0 + bz_1) - b(cz_0 + dz_1) : -\,c(az_0 + bz_1) + a(cz_0 + dz_1)] \\ &= [(ad - bc)z_0 : (ad - bc)z_1] = [z_0 : z_1]\,,\end{aligned}$$

da $ad - bc \neq 0$. Somit ist $F\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ biholomorph.

(b) Eine biholomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ ist insbesondere eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ rational ist, d. h. es existieren Polynome $g, h \in \mathbb{C}[z]$ mit $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$. Da f biholomorph ist, hat f genau eine Null- und genau eine Polstelle, jeweils der Ordnung 1. Daher müssen g und h linear sein, wenn wir (o. B. d. A.) voraussetzen, dass g und h keine gemeinsame Nullstelle haben. Die Bedingung, dass die Matrix der Koeffizienten in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ liegt, folgt wiederum aus der Bijektivität von f: Wäre nämlich $ad - bc = 0$, so wären $az + b$ und $cz + d$ linear abhängig, und folglich wäre f konstant.

Aufgabe 4.

(a) Wir zeigen zunächst, dass $\wp_\Lambda$ auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ eine holomorphe Funktion ist, d. h. wir wollen zeigen, dass die Reihe gleichmäßig auf Kompakta konvergiert. Sei dazu $R > 0$ gegeben. Da $\{\omega \in \Lambda\colon |\omega| \leq 2R\}$ endlich ist, reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ |\omega| \geq 2R}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq R\}$ konvergiert. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{\omega^2 - (z - \omega)^2}{(z - \omega)^2 \omega^2} \right| = \left| \frac{z(z - 2\omega)}{(z - \omega)^2 \omega^2} \right| = \left| \frac{z(2 - \frac{z}{\omega})}{\omega^3 (1 - \frac{z}{\omega})^2} \right| \\ &\leq \frac{R \cdot (2 + \frac{1}{2})}{|\omega|^3 \cdot (\frac{1}{2})^2} = \frac{10R}{|\omega|^3}\end{aligned}$$

für $z \in \mathbb{C}, \omega \in \Lambda$ mit $|z| \leq R$ und $|\omega| \geq 2R$.

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ für eine $\mathbb{R}$-Basis (ω_1, ω_2) von $\mathbb{C}$. Die Abbildung $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x\omega_1 + y\omega_2|$ hat ein positives Minimum, d. h. es existiert ein $\delta > 0$, sodass

$|n\omega_1 + m\omega_2|^2 \geq \delta(n^2+m^2)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt. Folglich ist

$$\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{Z} \\ (n,m) \neq (0,0)}} \frac{1}{(n^2+m^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Diese Reihe konvergiert, da das Integral

$$\int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi$$

endlich ist. Dies zeigt, dass $\wp_\Lambda$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ ist. Darüber hinaus folgt, dass $\wp_\Lambda$ Pole der Ordnung 2 in den Punkten von Λ hat, sodass $\wp_\Lambda$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist.
Betrachte nun die Ableitung

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3} .$$

Die Funktion $\wp'_\Lambda$ ist offensichtlich doppelt-periodisch bezüglich Λ. Folglich gibt es ein $c_i \in \mathbb{C}$, sodass $\wp_\Lambda(z+\omega_i) = \wp_\Lambda(z) + c_i$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ gilt. Darüber hinaus gilt nach Konstruktion $\wp_\Lambda(-z) = \wp_\Lambda(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Insbesondere ist $\wp_\Lambda(\frac{\omega_i}{2}) = \wp_\Lambda(-\frac{\omega_i}{2}) = \wp_\Lambda(\frac{\omega_i}{2}) + c_i$. Also ist $c_i = 0$, d. h. $\wp_\Lambda$ ist doppelt-periodisch.

(b) Sei $g := f - \wp_\Lambda$. Dann ist g eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit $\mathcal{P}(g) \subseteq \Lambda$. Da sowohl f als auch $\wp_\Lambda$ einen Pol der Ordnung 2 im Nullpunkt haben und die Koeffizienten c_{-2} und c_{-1} der Laurent-Entwicklung im Nullpunkt von f und $\wp_\Lambda$ übereinstimmen, ist g holomorph in einer Umgebung von 0. Da g doppelt-periodisch ist, ist g somit eine ganze holomorphe Funktion. Insbesondere definiert g eine holomorphe Funktion auf dem Torus $T_\Lambda = \mathbb{C}/\Lambda$, welche notwendigerweise konstant ist, da T_Λ kompakt ist. Also ist $g \equiv c_0 = 0$, d. h. es gilt $f = \wp_\Lambda$.