Übungsblatt 10 – Lösungen

Aufgabe 1.
Betrachte die offene Überdeckung $\mathcal{U} = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, \mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$. Da $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \cong \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{C}$, ist $H^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}, \mathcal{O}) = H^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}) = H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$. Folglich ist $\mathcal{U}$ eine Leray-Überdeckung. Insbesondere ist $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

Sei also nun $f \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ gegeben. Sei ferner $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k$ die Laurent-Entwicklung von f auf $\mathbb{C}^*$. Definiere $f_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ und $f_2(z) := -\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$. Dann sind $f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})$ und $f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$. Folglich ist $(f_1, f_2) \in \mathrm{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Ferner gilt $f = f_1|_{\mathbb{C}^*} - f_2|_{\mathbb{C}^*}$. Also ist $f = \delta(f_1, f_2)$ und somit $[f] = 0 \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

Aufgabe 2.

(a) Es ist $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \cong \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{C}$. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Jede holomorphe 1-Form ω über U kann man als $\omega = f\mathrm{d}z$ für eine holomorphe Funktion f auf U schreiben und umgekehrt ist für jede holomorphe Funktion f auf U die 1-Form $f\mathrm{d}z$ holomorph. Folglich ist die Abbildung $\mathcal{O}(U) \to \Omega^1(U)$, $f \mapsto f\mathrm{d}z$ ein Isomorphismus. Da diese Abbildung mit den Einschränkungsmorphismen kommutiert, definert dies somit einen Garbenisomorphismus $\Omega^1|_{\mathbb{C}} \cong \mathcal{O}|_{\mathbb{C}}$. Insbesondere ist $H^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}, \Omega^1) = H^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, \Omega^1) = H^1(\mathbb{C}, \Omega^1) = H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$. Also ist $\mathcal{U}$ eine Leray-Überdeckung.

(b) Sei $\omega \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega^1) \cong \Omega^1(\mathbb{C}^*)$ gegeben. Dann gibt es eine holomorphe Funktion f auf $\mathbb{C}^*$ mit $\omega = f\mathrm{d}z$. Sei ferner $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k$ die Laurent-Entwicklung von f auf $\mathbb{C}^*$.

Behauptung: *Es ist $\omega \in B^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$ genau dann, wenn $c_{-1} = \mathrm{Res}_0 f = 0$ gilt.*

„$\Rightarrow$“: Sei $\omega \in B^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$. Dann gibt es $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, sodass $f_1\mathrm{d}z + (\frac{1}{z})^*(f_2\mathrm{d}z) = f\mathrm{d}z$ gilt. D. h. es ist $f_1(z) - f_2(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2} = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Da f_1 holomorph in 0 ist und die Laurent-Entwicklung von $f_2(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}$ keinen Term $\frac{1}{z}$ hat (da f_2 holomorph ist), ist $c_{-1} = \mathrm{Res}_0 f = 0$.

„$\Leftarrow$“: Sei $c_{-1} = \mathrm{Res}_0 f = 0$. Definiere $f_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ und $f_2(z) := \sum_{k=2}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$. Dann ist $f_1\mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})$. Ferner ist

$$(\tfrac{1}{z})^*(f_2\mathrm{d}z) = -f_2(\tfrac{1}{z})\tfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z = -\sum_{k=2}^{\infty} c_{-k} z^{k-2}\mathrm{d}z$$

holomorph nach 0 fortsetzbar. Daher ist $f_2\mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$. Außerdem gilt $f\mathrm{d}z = (f_1\mathrm{d}z)|_{\mathbb{C}^*} - (f_2\mathrm{d}z)|_{\mathbb{C}^*}$. Also ist $f\mathrm{d}z = \delta(f_1\mathrm{d}z, f_2\mathrm{d}z)$ und somit $f \in B^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$.
Folglich ist $B^1(\mathcal{U}, \Omega^1) \cong \ker(\mathrm{Res}_0\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \to \mathbb{C})$. Da $\mathrm{Res}_0(\frac{1}{z}) = 1 \neq 0$ gilt, ist somit $H^1(\mathcal{U}, \Omega^1) \cong \mathbb{C}$ und die Kohomologieklasse von $\frac{1}{z}\mathrm{d}z$ ist eine Basis von $H^1(\mathbb{P}^1, \Omega^1)$.

Aufgabe 3.

(a) Sind $U, V \subseteq X$ offen mit $V \subseteq U$ und ist $f \in D(U)$, so ist offensichtlich auch $\{x \in V : f(x) \neq 0\} = \{x \in U : f(x) \neq 0\} \cap V$ diskret und abgeschlossen. Also ist D eine Prägarbe. Das Eindeutigkeitsaxiom der Vollständigkeit ist ebenfalls offensichtlich erfüllt.

Zum Existenzaxiom: Es sei $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung einer offenen Teilmenge U von X. Sei ferner $f : U \to \mathbb{Z}$ derart, dass $\{x \in U_\alpha : f(x) \neq 0\}$ diskret und abgeschlossen in U_α für alle $\alpha \in I$ ist.

Diskretheit: Sei $x_0 \in U$ mit $f(x_0) \neq 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\alpha_0 \in I$ mit $x_0 \in U_{\alpha_0}$. Da $\{x \in U_{\alpha_0} : f(x) \neq 0\}$ diskret ist, gibt es ein offenes $V \subseteq U_{\alpha_0}$ mit $x_0 \in V$, sodass $\{x \in V : f(x) \neq 0\} = \{x_0\}$ gilt. Folglich ist $\{x \in U : f(x) \neq 0\}$ diskret.

Abgeschlossenheit: Für jedes $\alpha \in I$ ist die Menge $U \setminus U_\alpha$ abgeschlossen in U. Folglich ist auch die Menge $(U \setminus U_\alpha) \cup \{x \in U_\alpha : f(x) \neq 0\}$ abgeschlossen in U. Also ist auch $\{x \in U : f(x) \neq 0\} = \bigcap_{\alpha \in I}((U \setminus U_\alpha) \cup \{x \in U_\alpha : f(x) \neq 0\})$ abgeschlossen.

(b) Sei $U \subseteq X$ offen und sei $f \in \mathcal{M}_X^*(U)$. Dann ist $\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f)$ diskret und abgeschlossen. Folglich ist $\nu(f) : U \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \nu_x(f)$ in $D(U)$. Falls $f \in \mathcal{O}_X^*(U)$, so hat f weder Null- noch Polstellen und folglich ist $\nu(f) = 0$. Also erhalten wir eine wohldefinierte Funktion $\nu : \mathcal{M}_X^*(U)/\mathcal{O}_X^*(U) \to D(U)$. Ferner ist diese Abbildung ein Gruppenmorphismus, welcher mit den Einschränkungsmorphismen kommutiert. Folglich erhalten wir einen Garbenmorphismus $\nu : \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* \to D$.

Injektivität: Angenommen, es sei $\nu(f) = 0$. Dann hat f weder Null- noch Polstellen und folglich ist $f \in \mathcal{O}_X^*$, also $[f] = 0$ in $\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$.

Surjektivität: Sei $x_0 \in X$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0, die biholomorph zur punktierten Einheitskreisscheibe ist. Da $\nu_0(z^k) = k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, ist folglich $\nu_{x_0} : (\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)_{x_0} \to \mathbb{Z}$ surjektiv.

(c) Sei $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ eine lokal endliche Überdeckung. Dann gibt es Teilmengen $A_\alpha \subseteq U_\alpha$, sodass $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ für alle $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha \neq \beta$ und $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = X$ gelten. Sei $U \subseteq X$ offen und sei $f \in D(U)$. Betrachte $\eta_\alpha(f) : U \to \mathbb{Z}$, $\eta_\alpha(f)(x) := f(x)$, falls $x \in U \cap A_\alpha$ und $\eta_\alpha(f)(x) := 0$ andernfalls. Dann ist $\{x \in U : \eta_\alpha(f)(x) \neq 0\} = \{x \in U : f(x) \neq 0\} \cap A_\alpha$ wieder diskret und abgeschlossen. Folglich ist $\eta_\alpha(f) \in D(U)$. Ferner ist $\eta_\alpha|_U : D(U) \to D(U)$ ein Gruppenmorphismus, welcher mit den Einschränkungsmorphismen kommutiert. Somit definiert η_α einen Garbenmorphismus $\mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_X$. Nach Konstruktion ist $(\eta_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Partition der Eins bezüglich $\mathcal{U}$.

Aufgabe 4.
Es ist $f \in H^0(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O}_D) \cong \Gamma(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O}_D)$ genau dann, wenn f eine meromorphe Funktion ist, die auf $(\mathbb{C}/\Lambda) \setminus \{P\}$ holomorph ist und $\nu_P(f) \geq -n$ erfüllt. Für $n \leq 0$ ist also f holomorph und folglich konstant. Für $n < 0$ muss f ferner eine Nullstelle in P haben und somit identisch 0 sein. Dies zeigt die Behauptung für $n \leq 0$.

Im Fall $n = 1$ hat f maximal einen einfachen Pol in P und ist somit eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}/\Lambda$ mit maximal einem einfachen Pol. Nach Aufgabe 2 vom Übungsblatt 3 muss f folglich holomorph sein, da $\mathbb{C}/\Lambda$ nicht biholomorph zu $\mathbb{P}^1$ ist. Dies zeigt die Behauptung für $n = 1$.

Für $n \geq 2$ kann man die Behauptung nun induktiv zeigen: O. B. d. A. sei $P = 0$. Ferner sei $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k z^k$ die Laurent-Entwicklung von f um den Nullpunkt. Hat f in P einen Pol der Ordnung $n = 2m$, so hat $f - c_{-n}\wp^m$ einen Pol der Ordnung $< n$, und hat f in P einen Pol der Ordnung $n = 2m + 3$, so hat $f + \frac{c_{-n}}{2}\wp^m\wp'$ einen Pol der Ordnung $< n$. Andererseits haben $\wp^m$ bzw. $\wp^m\wp'$ jeweils einen Pol der Ordnung n.