Übungsblatt 1 – Lösungen

Aufgabe 1.

(a)
$$\begin{aligned}\partial_z f\,\mathrm{d}z + \partial_{\bar z} f\,\mathrm{d}\bar z &= \tfrac{1}{2}(\partial_x f - \mathrm{i}\,\partial_y f)\,(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) + \tfrac{1}{2}(\partial_x f + \mathrm{i}\,\partial_y f)\,(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y)\\ &= \partial_x f\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}^2\,\partial_y f\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}f\,.\end{aligned}$$

(b) Sei $f = u + \mathrm{i}v$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist holomorph} \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_x u = \partial_y v \text{ und } \partial_y u = -\,\partial_x v\\ &\Leftrightarrow \quad (\partial_x u + \mathrm{i}\,\partial_x v) + \mathrm{i}(\partial_y u + \mathrm{i}\,\partial_y v) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \partial_{\bar z} f = \tfrac{1}{2}(\partial_x f + \mathrm{i}\,\partial_y f) = 0\,.\end{aligned}$$

(c) Sei $f = u + \mathrm{i}v$. Dann ist

$$J(f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung $z \mapsto \mathrm{i}z$ für $z \in \mathbb{C}$ ist als Matrix $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$I \circ J(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x v & \partial_y v \\ -\partial_x u & -\partial_y u \end{pmatrix}$$

und

$$J(f) \circ I = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_y u & \partial_x u \\ -\partial_y v & \partial_x v \end{pmatrix}.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist holomorph} \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_x u = \partial_y v \text{ und } \partial_y u = -\,\partial_x v\\ &\Leftrightarrow \quad I \circ J(f) = J(f) \circ I\\ &\Leftrightarrow \quad J(f) \text{ ist komplex linear.}\end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Da $f, g \in \mathcal{O}(U)$, gilt $\partial_{\bar z} f = \partial_{\bar z} g = 0$.

(a) Weil $\partial_{\bar z}$ linear ist, gilt $\partial_{\bar z}(f + g) = \partial_{\bar z} f + \partial_{\bar z} g = 0$. Also ist $f + g \in \mathcal{O}(U)$. Die Leibniz-Regel impliziert $\partial_{\bar z}(f \cdot g) = (\partial_{\bar z} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\bar z} g) = 0$. Also ist auch $f \cdot g \in \mathcal{O}(U)$.

(b) Sei $g = u + \mathrm{i}v$. Da $\frac{1}{g} = \frac{1}{u+\mathrm{i}v} = \frac{u-\mathrm{i}v}{u^2+v^2}$, gilt:

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}\left(\frac{1}{g}\right) &= \frac{(\partial_{\bar z}u)\cdot(u^2+v^2)-u\cdot(2u\cdot(\partial_{\bar z}u)+2v\cdot(\partial_{\bar z}v))}{(u^2+v^2)^2} - \mathrm{i}\,\frac{(\partial_{\bar z}v)\cdot(u^2+v^2)-v\cdot(2u\cdot(\partial_{\bar z}u)+2v\cdot(\partial_{\bar z}v))}{(u^2+v^2)^2}\\ &= \frac{(v^2-u^2)\cdot(\partial_{\bar z}u)-2uv\cdot(\partial_{\bar z}v)+2\mathrm{i}uv\cdot(\partial_{\bar z}u)+\mathrm{i}\,(v^2-u^2)\cdot(\partial_{\bar z}v)}{(u^2+v^2)^2}\\ &= \frac{(v^2-u^2)\cdot(\partial_{\bar z}g)+2\mathrm{i}uv\cdot(\partial_{\bar z}g)}{(u^2+v^2)^2} = -\frac{(u-\mathrm{i}v)^2}{(u^2+v^2)^2}\cdot(\partial_{\bar z}g) = -\frac{\partial_{\bar z}g}{g^2}\,.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Leibniz-Regel ergibt sich

$$\partial_{\bar z}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\partial_{\bar z}f)\cdot g - f\cdot(\partial_{\bar z}g)}{g^2} = 0\,.$$

Also ist $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}(U)$.

(c) Sei $h = u + \mathrm{i}v$. Da $\partial_x f = \partial_z f + \partial_{\bar z} f$ und $\partial_y f = \mathrm{i}\,(\partial_z f - \partial_{\bar z} f)$, gilt:

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}(f\circ h) &= \tfrac{1}{2}(\partial_x(f\circ h) + \mathrm{i}\,\partial_y(f\circ h))\\ &= \tfrac{1}{2}(((\partial_x f)\circ h)\cdot(\partial_x u) + ((\partial_y f)\circ h)\cdot(\partial_x v))\\ &\quad + \tfrac{\mathrm{i}}{2}(((\partial_x f)\circ h)\cdot(\partial_y u) + ((\partial_y f)\circ h)\cdot(\partial_y v))\\ &= ((\partial_x f)\circ h)\cdot(\partial_{\bar z}u) + ((\partial_y f)\circ h)\cdot(\partial_{\bar z}v)\\ &= ((\partial_z f)\circ h)\cdot((\partial_{\bar z}u) + \mathrm{i}\,(\partial_{\bar z}v)) + ((\partial_{\bar z} f)\circ h)\cdot((\partial_{\bar z}u) - \mathrm{i}\,(\partial_{\bar z}v))\\ &= ((\partial_z f)\circ(\partial_{\bar z}h) + ((\partial_{\bar z} f)\circ h)\cdot(\partial_{\bar z}\overline{h}) = 0\,.\end{aligned}$$

Also ist $f\circ h \in \mathcal{O}(U)$.

Aufgabe 3.
Seien $f, g \in \mathcal{O}(D)$ mit $f\cdot g = 0$ gegeben. Betrachte $\mathcal{Z}(f) := \{z \in D\colon f(z) = 0\}$ und $\mathcal{Z}(g) := \{z \in D\colon g(z) = 0\}$. Nach Vorraussetzung ist $\mathcal{Z}(f)\cup\mathcal{Z}(g) = D$. Da D offen ist, hat $\mathcal{Z}(f)$ oder $\mathcal{Z}(g)$ einen Häufungspunkt, o. B. d. A. $\mathcal{Z}(f)$. Dann ist aber f identisch 0 nach dem Identitätssatz, weil D zusammenhängend ist. Da f und g beliebig waren, ist folglich D ein Integritätsbereich.

Aufgabe 4.

(a) Sei zunächst f eine Einheit in $\mathcal{M}(D)$. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{M}(D)$ mit $f\cdot g = 1$. Aus $f\cdot g = 1$ folgt, dass $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{P}(g)$. Da g meromorph ist, ist $\mathcal{P}(g)$ diskret. Somit ist auch $\mathcal{Z}(f)$ diskret.
Sei umgekehrt $\mathcal{Z}(f)$ diskret. Dann ist f insbesondere nicht identisch 0. Folglich ist $g := \frac{1}{f}$ eine meromorphe Funktion mit $\mathcal{P}(g) = \mathcal{Z}(f)$ und $f\cdot g = 1$.

(b) Sei f nicht identisch 0. Dann ist $\mathcal{Z}(f)$ diskret nach dem Identitätssatz, weil $D\setminus\mathcal{P}(f)$ zusammenhängend ist. Nach Teil (a) ist somit f eine Einheit. Da f beliebig war, ist folglich $\mathcal{M}(D)$ ein Körper.