Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (Rücktransport von Differentialformen)**.**
(a) Sei $F := \exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^*$ und sei $\omega := \frac{1}{z}\mathrm{d}z$ über $\mathbb{C}^*$. Bestimmen Sie $F^*(\omega)$.
(b) Sei $F := \tan\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$ und sei $\omega := \frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z$ über $\mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$. Zeigen Sie, dass ω zu einer holomorphen 1-Form auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$ erweitert werden kann und bestimmen Sie $F^*(\omega)$.

Aufgabe 2 (globale holomorphe 1-Formen)**.**
(a) Zeigen Sie, dass jede holomorphe 1-Form auf $\mathbb{P}^1$ identisch 0 ist.
(b) Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Nutzen Sie Teil (a), um zu zeigen, dass jede holomorphe Abbildung $F\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}/\Lambda$ konstant ist.
(c) Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und sei $\Omega^1(\mathbb{C}/\Lambda)$ der Vektorraum der holomorphen 1-Formen auf dem Torus $\mathbb{C}/\Lambda$. Zeigen Sie, dass $\dim \Omega^1(\mathbb{C}/\Lambda) = 1$.

Aufgabe 3 (eine nicht-verschwindende holomorphe 1-Form)**.**
Sei (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^3 + z^3 - 1 \in \mathbb{C}(z)[T]$ (vgl. Aufgabe 2 von Übungsblatt 6).
(a) Bestimmen Sie alle Null- und Polstellen der Differentialform $\mathrm{d}\pi$ auf X.
(b) Zeigen Sie, dass die Differentialform $\frac{1}{f^2}\mathrm{d}\pi$ holomorph auf X ist und keine Nullstellen hat.

Aufgabe 4 (Dolbeault-Kohomologie)**.**
Sei X eine kompakte riemannsche Fläche. Die (p,q)*-te Dolbeault-Kohomologie* $H^{p,q}(X)$ ist definiert als

$$H^{p,q}(X) := \frac{\ker(\bar\partial\colon \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X))}{\operatorname{im}(\bar\partial\colon \mathcal{A}^{p,q-1}(X) \to \mathcal{A}^{p,q}(X))}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $H^{0,0}(X) \cong \mathbb{C}$.
(b) Zeigen Sie, dass $H^{1,0}(X) \cong \Omega^1(X)$.
(c) Zeigen Sie, dass die bilineare Abbildung

$$\mathcal{A}^{1,0}(X) \times \mathcal{A}^{0,1}(X) \to \mathbb{C}\,, \quad (\omega_1, \omega_2) \mapsto \int_X \omega_1 \wedge \omega_2$$

nicht-ausgeartet ist.
Hinweis: Betrachten Sie die komplexe Konjugation.
(d) Zeigen Sie, dass die bilineare Abbildung von Teil (c) eine wohldefinierte Abbildung $H^{1,0}(X) \times H^{0,1}(X) \to \mathbb{C}$ induziert. Warum ist die induzierte Abbildung $H^{1,0}(X) \to H^{0,1}(X)^*$ injektiv?

(e) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathcal{A}^{1,1}(X) \to \mathbb{C}\,, \quad \omega \mapsto \int_X \omega$$

eine wohldefinierte und surjektive Abbildung $H^{1,1}(X) \to \mathbb{C}$ induziert.

Bemerkung: Wir werden später in der Vorlesung sehen, dass die bilineare Abbildung $H^{1,0}(X) \times H^{0,1}(X) \to \mathbb{C}$ von Teil (d) nicht-ausgeartet ist (d. h. die induzierte Abbildung $H^{1,0}(X) \to H^{0,1}(X)^*$ ist bijektiv) und dass die Abbildung $H^{1,1}(X) \to \mathbb{C}$ von Teil (e) ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5 (Fubini-Study-Form)**.**
Auf $\mathbb{P}^1$ sei folgende 2-Form definiert: In der Karte $\{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1 \colon z_i \neq 0\} \to \mathbb{C}$, $[z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_{1-i}}{z_i}$ sei

$$\omega_{\mathrm{FS}} := \tfrac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log(1 + |z|^2)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Definition in der Tat unabhängig davon ist, welche der beiden Karten wir wählen. Folglich wird eine globale 2-Form definiert.

(b) Sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$$

und sei $f \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$,

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

die zugehörige Möbiustransformation (vgl. Aufgabe 3 von Übungsblatt 2). Zeigen Sie, dass

$$f^*(\omega_{\mathrm{FS}}) = \omega_{\mathrm{FS}}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{P}^1} \omega_{\mathrm{FS}} = 1\,.$$

Insbesondere ist ω_{FS} nicht exakt.