Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (hyperelliptische riemannsche Flächen)**.**
Sei $g \geq 2$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass es eine kompakte riemannsche Fläche vom Geschlecht g gibt, welche eine meromorphe Funktion besitzt, die genau zwei Polstellen hat (mit Vielfachheit gezählt).
Bemerkung: Eine solche riemannsche Fläche wird *hyperelliptisch* genannt.

Aufgabe 2 ($\sqrt[3]{1-z^3}$)**.**
Sei (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^3 + z^3 - 1 \in \mathbb{C}(z)[T]$.

(a) Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte von π.
(b) Bestimmen Sie alle Null- und Polstellen von $f + \pi$.
(c) Berechnen Sie die elementarsymmetrischen Funktionen von $f + \pi$ bezüglich π.

Aufgabe 3 ($\sqrt[n]{1-z^n}$)**.**
Sei (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^n + z^n - 1 \in \mathbb{C}(z)[T]$. Zeigen Sie, dass das Geschlecht g von X gegeben ist durch

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,.$$

Aufgabe 4 (explizite Darstellung als algebraische Funktion [Präsenzaufgabe])**.**

(a) Sei (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^2 + z^8 + 1 \in \mathbb{C}(z)[T]$. Zeigen Sie, dass X biholomoph zur riemannschen Fläche X aus Aufgabe 1 vom Übungsblatt 4 ist.
(b)* Sei Y die riemannsche Fläche Y aus Aufgabe 1 (c) vom Übungsblatt 4. Bestimmen Sie ein separables Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$, sodass sich sich Y als algebraische Funktion von $T^2 + P(z) \in \mathbb{C}(z)[T]$ schreiben lässt.

Aufgabe 5 (isomorphe Körper von meromorphen Funktionen)**.**
Seien X und Y zwei kompakte riemannsche Flächen, welche folgende Bedingung erfüllen: *Sind $a_1, \ldots, a_n$ verschiedene Punkte und $c_1, \ldots, c_n$ komplexe Zahlen, so existiert eine meromorphe Funktion f mit $f(a_k) = c_k$ für $k = 1, \ldots, n$.*
Zeigen Sie: Sind $\mathcal{M}(X)$ und $\mathcal{M}(Y)$ isomorph als $\mathbb{C}$-Algebren, so sind X und Y biholomoph.
Bemerkung: Wir werden später in der Vorlesung sehen, dass diese Bedingung immer erfüllt ist.
Hinweis: Schreiben Sie X und Y als algebraische Funktion, welche durch ein und dasselbe irreduzible Polynom definiert ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 6 (Einbettung eines Torus in den $\mathbb{P}^2$ [Präsenzaufgabe]).
Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und sei $\wp\colon \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{C}$ die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion bezüglich Λ. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^2\,, \quad [z] \mapsto \begin{cases} [1 : \wp(z) : \wp'(z)] & \text{falls } z \notin \Lambda, \\ [0 : 0 : 1] & \text{falls } z \in \Lambda \end{cases}$$

eine Einbettung mit Bild

$$\{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 \colon z_0 z_2^2 = 4(z_1 - e_1 z_0)(z_1 - e_2 z_0)(z_1 - e_3 z_0)\}$$

ist, wobei $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}$ definiert sind wie in Aufgabe 3 (e) vom Übungsblatt 3.