Übungsblatt 5

Aufgabe 1.
Seien X und $\hat{X}$ zwei riemannsche Flächen, sei $\pi\colon \hat{X} \to X$ eine unverzweigte holomorphe Überlagerung und sei $\hat{f}\colon \hat{X} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Seien ferner $\hat{a} \in \hat{X}$, $a := \pi(\hat{a})$ und $\varphi := \pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{a}}) \in \mathcal{O}_a$. Zeigen Sie, dass $(\hat{X}, \pi, \hat{f}, \hat{a})$ genau dann eine maximale analytische Fortsetzung ist, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für je zwei verschiedene Punkte $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \pi^{-1}(\{a\})$ sind die Keime $\varphi_1 := \pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{a}_1})$ und $\varphi_2 := \pi_*(\hat{\boldsymbol{f}}_{\hat{a}_2})$ verschieden.

Aufgabe 2.
Seien X eine riemannsche Fläche und sei $a \in X$. Angenommen, $\varphi \in \mathcal{O}_a$ habe eine analytische Fortsetzung entlang jeder Kurve in X, die in a startet. Sei $(\hat{X}, \pi, \hat{f}, \hat{a})$ die maximale analytische Fortsetzung von φ. Zeigen Sie, dass $\pi\colon \hat{X} \to X$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 3.
Seien X eine riemannsche Fläche, $\hat{X} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \hat{X} \to X$ eine unverzweigte holomorphe Überlagerung und $\hat{a} \in \hat{X}$. Dann gibt es Umgebungen $\hat{U}$ von $\hat{a}$ in $\hat{X}$ und U von $f(\hat{a})$ in X, sodass $f|_{\hat{U}}\colon \hat{U} \to U$ biholomorph ist. Bestimmen Sie eine maximale analytische Fortsetzung der Umkehrabbildung $[U, (f|_{\hat{U}})^{-1}] \in \mathcal{O}_{f(\hat{a})}$.

Aufgabe 4.
(a) Sei $(\hat{X}, \pi, \hat{f}, \hat{a})$ die maximale analytische Fortsetzung des Logarithmus über $\mathbb{C}^*$. Zeigen Sie, dass $\hat{X}$ biholomorph zu $\mathbb{C}$ ist.
(b) Sei $(\hat{X}, \pi, \hat{f}, \hat{a})$ die maximale analytische Fortsetzung der k-ten Wurzel über $\mathbb{C}^*$. Zeigen Sie, dass $\hat{X}$ biholomorph zu $\mathbb{C}^*$ ist.
(c)* Sei $(\hat{X}, \pi, \hat{f}, \hat{a})$ die maximale analytische Fortsetzung der Funktion $\sqrt{1-z^2}$ über $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$. Zeigen Sie, dass $\hat{X}$ biholomorph zu $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ ist.