Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (kompakte riemannsche Flächen höheren Geschlechts)**.**
Sei

$$W := \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \colon z_0^8 + z_1^8 + z_2^2 = 0\}\,.$$

Auf W sei eine Äquivalenzrelation gegeben durch

$$(z_0, z_1, z_2) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda^4 z_2) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Bezeichne $[z_0 : z_1 : z_2]$ die Äquivalenzklasse von (z_0, z_1, z_2) und sei $X := W/\sim$, versehen mit der Quotiententopologie.

(a) Warum ist X kompakt? Seien ferner $U_i := \{[z_0 : z_1 : z_2] \in X \colon z_i \neq 0\}$ für $i = 0, 1, 2$. Warum sind diese Mengen offen in X? Zeigen sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_0 \colon U_0 \to \mathbb{P}^1\,, &\quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_1^4 : z_2]\,, \\ \varphi_1 \colon U_1 \to \mathbb{P}^1\,, &\quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^4 : z_2] \quad \text{und} \\ \varphi_2 \colon U_2 \to \mathbb{P}^1\,, &\quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1] \end{aligned}$$

lokale Homöomorphismen sind. Folglich werden auf U_0, U_1 und U_2 eindeutige komplexe Strukturen definiert, sodass die Abbildungen φ_0, φ_1 und φ_2 holomorph sind. Schlussfolgern Sie, dass auf X eine eindeutige komplexe Struktur existiert, sodass φ_0, φ_1 und φ_2 holomorph sind.

(b) Betrachten wir nun die Abbildung

$$\tilde{\varphi}_2 \colon X \to \mathbb{P}^1\,, \quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1]\,.$$

Was ist die Verzweigungsordnung dieser Abbildung? Wie viele Verzweigungspunkte hat diese Abbildung? Wenden Sie nun die Formel von Riemann–Hurwitz an, um das Geschlecht von X zu bestimmen.

(c) Betrachten wir ferner die Abbildung

$$\rho \colon X \to X\,, \quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [-z_1 : z_0 : -z_2]\,.$$

Zeigen Sie, dass ρ eine fixpunktfreie holomorphe Involution ist. Begründen Sie, warum der Quotient $Y := X/\langle\rho\rangle$ eine komplexe Struktur besitzt, sodass die Projektion $\pi \colon X \to Y$ holomorph ist. Somit stellt π eine unverzweigte Überlagerung vom Grad 2 dar. Was heißt das für das Geschlecht von Y?

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (eine holomorphe Überlagerung, welche nicht normal ist)**.**
Seien $X := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm 2\}$ und $Y := \mathbb{C} \setminus \{\pm 2\}$. Ferner sei $p\colon X \to Y$ gegeben durch

$$p(z) := z^3 - 3z\,.$$

Zeigen Sie, dass p eine unverzweigte, 3-blättrige, holomorphe Überlagerung ist und bestimmen Sie $\mathrm{Deck}(X/Y)$.
Hinweis: Jede biholomorphe Abbildung $f\colon X \to X$ lässt sich zu einem Automorphismus von $\mathbb{P}^1$ fortsetzen.

Aufgabe 3 (algebraische Abhängigkeit meromorpher Funktionen)**.**
Sei X eine kompakte riemannsche Fläche und seien $f, g \in \mathcal{M}(X)$ zwei meromorphe Funktionen. Zeigen Sie, dass es ein von 0 verschiedenes Polynom $P \in \mathbb{C}[Z, W]$ gibt, sodass $P(f, g) = 0$ gilt.
Hinweis: Angenommen, f habe m Polstellen und g habe n Polstellen (jeweils mit Vielfachheit gezählt). Sei ferner $d := m + n$. Zeigen Sie, dass es möglich ist, komplexe Zahlen a_{jk} zu finden (nicht alle gleich 0), sodass die Funktion

$$\sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{d} a_{jk} f(z)^j g(z)^k$$

mindestens $(d^2 + 2d)$ verschiedene Nullstellen auf X hat. Zeigen Sie ferner, dass diese Funktion maximal d^2 Polstellen (mit Vielfachheit gezählt) hat, und schlussfolgern Sie, dass diese Funktion identisch 0 ist.