Riemannsche Flächen (SoSe 2016)
Prof. Dr. Frederik Witt
Dr. Matthias Ohst

Universität Stuttgart

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Null- und Polstellen von meromorphen Funktionen).
Sei X eine kompakte riemannsche Fläche und seien $f, g \in \mathcal{M}(X)^*$ zwei meromorphe Funktionen mit den gleichen Null- und Polstellen (mit Vielfachheit gezählt). Zeigen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{C}^*$ mit $f = c \cdot g$ gibt.

Aufgabe 2 (meromorphe Funktionen mit genau einer einfachen Polstelle).
Sei X eine kompakte riemannsche Fläche, die eine meromorphe Funktion besitzt, welche genau eine einfache Polstelle hat. Zeigen Sie, dass X biholomorph zu $\mathbb{P}^1$ ist.

Aufgabe 3 (der Körper der meromorphen Funktionen für einen Torus).
Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. In Aufgabe 4 vom letzten Übungsblatt haben wir bereits die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion kennen gelernt:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

(a) Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eine doppelt-periodische meromorphe Funktion. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $g \in \mathbb{C}[z]$ gibt, sodass $g(\wp(z))f(z)$ eine doppelt-periodische meromorphe Funktion ist, deren Polstellen in Λ enthalten sind.
Hinweis: Zu einer Polstelle a betrachten Sie $(\wp(z) - \wp(a))^n$ für hinreichend großes n.

(b) Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eine doppelt-periodische meromorphe Funktion, deren Polstellen in Λ enthalten sind. Sei ferner f gerade, d. h. $f(-z) = f(z)$. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $g \in \mathbb{C}[z]$ gibt, sodass $f(z) = g(\wp(z))$ gilt.
Hinweis: Aufgabe 4 (b) vom letzten Übungsblatt.

(c) Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eine doppelt-periodische meromorphe Funktion. Zeigen Sie, dass es rationale Funktionen $g, h \in \mathbb{C}(z)$ gibt, sodass $f(z) = g(\wp(z)) + h(\wp(z))\wp'(z)$ gilt.
Hinweis: Der Quotient zweier ungerade Funktionen ist gerade.

(d) Zeigen Sie, dass $a \in \mathbb{C}$ genau dann eine Nullstelle von $\wp'$ ist, wenn $a \notin \Lambda$ und $2a \in \Lambda$ gilt. Schlussfolgern Sie, dass $\wp'$ auf dem Torus T_Λ genau drei einfache Nullstellen hat.

(e) Sei $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2$ eine Basis von Λ, d. h. $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Zeigen Sie, dass

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

gilt, wobei $e_1 := \wp(\frac{\omega_1}{2})$, $e_2 := \wp(\frac{\omega_2}{2})$ und $e_3 := \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$. Warum hängen e_1, e_2 und e_3 (bis auf die Reihenfolge) nur vom Gitter Λ, nicht jedoch von der Wahl der Basis (ω_1, ω_2) ab?
Hinweis: Aufgabe 1.

(f) Schlussfolgern Sie, dass

$$K_{T_\Lambda} \cong \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)).$$