Universität Stuttgart

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Eigenschaften von $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$)**.**
Sei $f\colon X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung und

$$f^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)\,, \quad f^*(\varphi) := \varphi \circ f\,.$$

Zeigen Sie, dass f^* ein Ringmonomorphismus ist.

Aufgabe 2 (Bild holomorpher Abbildungen)**.**
Seien $p_1, \dots, p_n$ Punkte auf der kompakten riemannschen Fläche X und sei

$$f\colon X \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \to \mathbb{C}$$

eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

Aufgabe 3 (Automorphismen von $\mathbb{P}^1$)**.**

(a) Sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})\,.$$

Zeigen Sie, dass die *Möbiustransformation*

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,,$$

welche holomorph auf $\{z \in \mathbb{C}\colon cz+d \neq 0\}$ ist, zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{P}^1$ erweitert werden kann. Zeigen Sie ferner, dass $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ biholomorph ist, d. h. f ist ein Automorphismus von $\mathbb{P}^1$.

(b) Zeigen Sie umgekehrt, dass jede biholomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ durch eine Möbiustransformation gegeben ist.

Aufgabe 4 (Weierstraß'sche $\wp$-Funktion)**.**
Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Die *Weierstraß'sche $\wp$-Funktion* bezüglich Λ ist definiert durch

$$\wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\wp_\Lambda$ eine doppelt-periodische meromorphe Funktion bezüglich Λ ist, welche Pole in allen Punkten von Λ hat.
Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}\,.$$

(b) Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eine doppelt-periodische Funktion bezüglich Λ, welche ihre Pole in Punkten von Λ hat und welche die folgende Laurent-Entwicklung um den Nullpunkt hat:

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} c_k z^k\,, \quad \text{wobei } c_{-2} = 1,\ c_{-1} = c_0 = 0.$$

Zeigen Sie, dass $f = \wp_\Lambda$.