Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/13	/10	/12	/13	/14	/75

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Wir integrieren $f(z) = \mathrm{e}^{4z}/z^2 = z^{-2} + 4z^{-1} + 8 + \dots$ entlang eines positiven Rechteckrandes $\partial R \subset \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Welche Werte kann das komplexe Wegintegral $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$ annehmen?

Begründete Antwort:

In $z = 0$ sieht man das **Residuum** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 4$. Dank **Residuensatz** gilt:

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 2\pi\mathrm{i} \sum_{s \in \mathring{R}} \operatorname{res}_s(f) \quad = \quad \begin{cases} 8\pi\mathrm{i} & \text{für } 0 \in \mathring{R}, \\ 0 & \text{für } 0 \in \mathbb{C} \smallsetminus R. \end{cases}$$

Erläuterung: Der Residuensatz für holomorphe Funktionen vereinfacht viele Integrale! Die vorliegende Frage zielt auf ein besonders einfaches Beispiel, ohne Rechnung.

2

2B. Sei $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 > 0 \,\}$ der dreidimensionale euklidische Raum ohne die x–Achse. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot}(f) = 0$, ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das **Wirbelfeld** $f(x,y,z) = (0, -z, y)/(y^2 + z^2)$.

Erläuterung: Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig für ein Potential, aber hinreichend erst für **einfach zusammenhängende** Gebiete. Das Gebiet U ist nicht einfach zusammenhängend. Vermutlich hat demnach nicht jedes rotationsfreie Vektorfeld ein Potential. Wirklich überzeugend ist aber erst ein konkretes Gegenbeispiel, etwa wie angegeben das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters entlang der x–Achse. Dieses prominente Vektorfeld wurde in Übung und Vorlesung behandelt, ausführlich und mehrfach: Auf ganz U gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$, aber dennoch gilt $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang eines geschlossenen Weges um die x–Achse. Demnach ist f zwar rotationsfrei, kann aber dennoch kein Potential auf U haben.

2

2C. Wenn die Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ einen doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ hat, dann existieren zu A zwei linear unabhängige Eigenvektoren $u, v \in \mathbb{C}$. Stimmt das immer?

Begründete Antwort:

Nein. Gegenbeispiel ist die Jordan–Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Erläuterung: Das charakteristische Polynom ist $P_A(x) = \det(A - xE) = (x - \lambda)^2$. Aber der Eigenraum $\ker(A - \lambda E) = \mathbb{C}e_1$ ist nur eindimensional! Glücklicherweise gibt zwei linear unabhängige Hauptvektoren, die kanonische Wahl sind e_1, e_2. Allgemein wissen Sie aus der HM1: Genau dann ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, d.h. Hauptvektoren höherer Stufe treten dann nicht auf. Wenn mehrfache Eigenwerte vorliegen, dann *können* Hauptvektoren höherer Stufe auftreten, *müssen* aber nicht.

2

2D. Wenn zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine Hauptvektorkette $0 \xleftarrow{A-\lambda} u \xleftarrow{A-\lambda} v$ der Länge 2 existiert, dann hat A den doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Stimmt das immer?

Begründete Antwort:

Ja. Dank der gegebenen Jordan–Basis $\mathscr{B} = (u, v)$ gilt $A \sim B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Erläuterung: Gegeben ist der Hauptvektor v zweiter Stufe. Das heißt, $u = (A-\lambda)v$ ist nicht null, erst $(A-\lambda)u = 0$ verschwindet. Wir erhalten so eine Basis (u, v) des Vektorraumes $\mathbb{C}^2$, wie man leicht nachrechnet: Vektoren einer Hauptvektorkette sind linear unabhängig. In dieser Basis wird A dargestellt durch den obigen Jordan–Block B. Also ist das charakteristische Polynom $P_A(x) = P_B(x) = \det(B - xE) = (x-\lambda)^2$. Dieses hat die doppelte Nullstelle λ. Erinnerung an die HM1: Ist $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ nicht-diagonalisierbar, so hat A nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ und für diesen gilt $1 \le$ geometrische Vielfachheit $<$ algebraische Vielfachheit ≤ 2.

$\overline{}$ 2

2E. Eindeutigkeit 1: Gegeben sei eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit stetiger rechter Seite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Können sich verschiedene Lösungsfunktionen $y \ne \tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schneiden?

Begründete Antwort:

Ja. Ein Gegenbeispiel aus der Vorlesung ist Torricellis Eimer $y'(x) = a\sqrt{y(x)}$.

Erläuterung: Die Stetigkeit von f allein genügt nicht, um die Eindeutigkeit von Lösungen zu gegebenen Anfangswerten zu garantieren: Der Eindeutigkeitssatz verlangt stetige Differenzierbarkeit von $f(x, y)$ nach y. Warnende Gegenbeispiele kennen Sie aus der Vorlesung.

Zwei Lösungen $y, \tilde{y} : I \to \mathbb{R}$ können einen gemeinsamen Startpunkt $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$ haben und dennoch auf ihrem gemeinsamen Lösungsintervall I voneinander abweichen. Man nennt solche Probleme *schlecht gestellt* und versucht, sie zu erkennen und möglichst zu vermeiden.

$\overline{}$ 2

2F. Eindeutigkeit 2: Jede konstante Funktion $\tilde{y}(x) = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ löst die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{|x|}\sin y(x)$. Ist demnach jede andere, nicht-konstante Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt?

Begründete Antwort:

Ja. Der Eindeutigkeitssatz schließt aus, dass sich die Lösungen y und $\tilde{y}$ schneiden.
Er ist hier anwendbar, da $f(x, y) = \sqrt{|x|}\sin y(x)$ stetig differenzierbar nach y ist!

Erläuterung: Zur *Existenz* von Lösungen genügt schon die Stetigkeit der rechten Seite $f(x, y)$, zur *Eindeutigkeit* benötigen wir definitiv mehr (2E). Cauchys Eindeutigkeitssatz gibt hierüber Auskunft: Es genügt, dass $f(x, y)$ stetig differenzierbar ist nach y. Anders als in Frage 2E ist diese Voraussetzung hier erfüllt. Demnach können sich verschiedene Lösungen nicht schneiden.

Anwendung auf unsere Gleichung: Für jede nicht-konstante Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $k\pi < y(0) < (k+1)\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $y(x) \in \,]k\pi, (k+1)\pi[$ für alle Zeit $x \in \mathbb{R}$, denn y schneidet weder $\tilde{y}(x) = k\pi$ noch $\hat{y}(x) = (k+1)\pi$. Dem Eindeutigkeitssatz sei Lob und Dank! Solche wichtigen, qualitativen Aussagen können wir also auch schon ableiten, ohne die Lösung berechnen zu müssen! Oft kann oder will man sie auch gar nicht exakt berechnen, so wie hier.

$\overline{}$ 2

Aufgabe 3. *Differentialgleichungssysteme* (*4+4+1+4 = 13 Punkte*)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in $\mathbb{R}^3$. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$Av_1 = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot v_1, \qquad \text{Eigenvektor!}}\,, \qquad Av_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot v_2, \qquad \text{Eigenvektor!}}$$

$$Av_3 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_2 - 2 \cdot v_3, \quad \text{Hauptvektor!}}\,, \qquad B = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{Jordan–Blöcke!}}$$

4

3B. Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von $y'(t) = A\,y(t)$ mit $y_k(0) = v_k$.

$$y_1(t) = \boxed{\mathrm{e}^{-2t} v_1 = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenfunktion!}}$$

$$y_2(t) = \boxed{\mathrm{e}^{-2t} v_2 = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenfunktion!}}$$

$$y_3(t) = \boxed{\mathrm{e}^{-2t}(v_3 + t v_2) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1+t \end{pmatrix} \qquad \text{Hauptfunktion!}}$$

Wie lautet demnach die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des DGSystems $y'(t) = A\,y(t)$?

$$y(t) = \boxed{c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3(1+t) \\ -c_1 + c_2 + c_3 t \\ c_2 + c_3(1+t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

4

3C. Welches asymptotische Verhalten hat die allgemeine Lösung $y(t)$ für $t \to \infty$?

Für $t \to \infty$ gilt $y(t) \to 0$.

1

3D. Lösen Sie das inhomogene DGSystem $u'(t) = A\,u(t) + \mathrm{e}^{-t} v_3$ mit $u(0) = v_2 + v_3$ durch den Ansatz $u(t) = u_1(t)v_1 + u_2(t)v_2 + u_3(t)v_3$ mit $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Einsetzen und Koeffizientenvergleich führt zu folgendem DGSystem:

$u_1'(t) =$ $-2u_1(t)$ Koeffizientenvergleich! , $u_1(0) = 0$

$u_2'(t) =$ $-2u_2(t) + u_3(t)$ Koeffizientenvergleich! , $u_2(0) = 1$

$u_3'(t) =$ $-2u_3(t) + \mathrm{e}^{-t}$ Koeffizientenvergleich! , $u_3(0) = 1$

Bestimmen Sie die Funktion u_3. (Hier gilt zufällig $u_2 = u_3$. Die Lösung $u_1(t) = 0$ ist klar.)

$u_3(t) =$ e^{-t} Partikulärlösung ohne Resonanz!

4

Erläuterung: In $u'(t) = A\,u(t) + \mathrm{e}^{-t} v_3$ setzen wir $u(t) = u_1(t)v_1 + u_2(t)v_2 + u_3(t)v_3$ ein:

$$\begin{aligned} u_1'(t)v_1 + u_2'(t)v_2 + u_3'(t)v_3 &= u_1(t)(-2v_1) + u_2(t)\cdot(-2v_2) + u_3(t)(-2v_3 + v_2) + \mathrm{e}^{-t} v_3 \\ \iff \quad 0 &= \big[u_1'(t) + 2u_1(t)\big]v_1 + \big[u_2'(t) + 2u_2(t) - u_3(t)\big]v_2 + \big[u_3'(t) + 2u_3(t) - \mathrm{e}^{-t}\big]v_3 \end{aligned}$$

Drei Koeffizientenvergleiche liefern die obigen drei Gleichungen für u_1, u_2, u_3: Diese Gleichungen sind offensichtlich hinreichend, aber auch notwendig, da $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Für u_3 liegt keine Resonanz vor, der Ansatz $u_3(t) = c\,\mathrm{e}^{-t}$ liefert die Partikulärlösung. Setzt man anschließend $u_3(t) = \mathrm{e}^{-t}$ in die Gleichung für u_2 ein, dann erhält man dieselbe DG wie für u_3, somit $u_2(t) = u_3(t)$.

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen (2+2+2+4 = 10 Punkte)*

4A. Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung:

$p(x) =$ $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ Doppelte Nullstelle!

Folgern sie hieraus die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$ $\mathrm{e}^{-t}(c_1 + c_2 t)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Fundamentallösungen!

2

4B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 4t\mathrm{e}^t$.

Ansatz:

$y(t) =$ $(at + b)\mathrm{e}^t$ Ansatz für spezielle rechte Seite!

Lösung:

$y(t) =$ $(t-1)\mathrm{e}^t$ Einsetzen und Koeffizientenvergleich!

2

4C. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

$y(t) =$ $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ Der Ansatz $c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ liefert $2\mathrm{i}c = 1$.

Leiten Sie daraus eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \cos(t)$ ab.

$y(t) =$ $\dfrac{1}{2}\sin(t)$ $= \mathrm{Re}\big(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big) = \mathrm{Re}\big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)\big)$

2

4D. Nennen Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = -4te^t + 2\cos(t)$:

$y(t) =$ $(1-t)\mathrm{e}^t + \sin(t) + \mathrm{e}^{-t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Dank der vorigen Fragen

$y'(t) =$ $-t\mathrm{e}^t + \cos(t) + \mathrm{e}^{-t}(-c_1 + c_2 - c_2 t)$ Sorgfältig ableiten!

Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 0$:

$y(t) =$ $(1-t)\mathrm{e}^t + \sin(t) + \mathrm{e}^{-t}$ Koeffizientenvergleich!

$\overline{}$
4

Aufgabe 5. *Wahrscheinlichkeit: Grenzwertsätze* (*4+2+2+3+1 = 12 Punkte*)

Eine Probe von 2g Uran 238 enthält etwa $a = 5 \cdot 10^{21}$ Atome. Die Zerfallswkt jedes Atoms in der nächsten Stunde ist $z = 2 \cdot 10^{-14}$. Wir nehmen die Zerfälle als stochastisch unabhängig an, insbesondere keine Kettenreaktion. Sei X die Gesamtzahl der Zerfälle in der nächsten Stunde.

5A. Nennen Sie die exakte Verteilung (in diesem vereinfachten Modell):

$$\mathbf{P}(X{=}k) = \binom{a}{k} z^k (1-z)^{a-k}$$

Binomialverteilung $B(a, z)$

Bestimmen Sie hierzu Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ und Streuung σ. Runden Sie das Ergebnis jeweils auf die nächstgelegene ganze Zahl.

$$\mu = \mathbf{E}(X) = az = 5 \cdot 10^{21} \cdot 2 \cdot 10^{-14} = 10^8$$

Erwartung zu $B(a, z)$

$$\sigma^2 = \mathbf{V}(X) = az(1-z) = 10^8 - 2 \cdot 10^{-6} \approx 10^8$$

Varianz zu $B(a, z)$

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{V}(X)} = \sqrt{10^8 - 2 \cdot 10^{-6}} \approx \sqrt{10^8} \approx 10^4$$

Streuung zu $B(a, z)$

4

5B. Wie klein ist laut Schranke der totale Abstand zur Poisson–Verteilung $P(\mu)$?

$$\big\|\mathbf{P}_X - P(\mu)\big\| \le az^2 = 5 \cdot 10^{21} \cdot 4 \cdot 10^{-28} = 2 \cdot 10^{-6}$$

Erläuterung: Dies ist die Fehlerschranke zwischen Binomial $B(a, z)$ und Poisson $P(az)$. Sie ist extrem klein, wie die Aufgabenstellung erahnen ließ. Ausrechnen gibt Gewissheit!

2

5C. Wie klein ist laut Schranke der Approximationsfehler zur Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$?

$$|\delta| \le \frac{|1-2z|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} < \frac{1}{6\sigma} < \frac{1}{\sigma} = 10^{-4}$$

Erläuterung: Dies sind die Fehlerschranken aus dem lokalen bzw. zentralen Grenzwertsatz. Die beste (links) ist $\approx 1/(10\sigma) \approx 10^{-5}$. Selbst die gröbste $< 1/\sigma \approx 10^{-4}$ genügt hier noch.

2

5D. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}\big(|X-\mu| \le 17\,000\big)$ durch eine geeignete Näherung. Gesucht ist das Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt.

$\mathbf{P}\big(\lvert X-\mu\rvert \le 17\,000\big)$	$\approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$	Näherung durch die Normalverteilung
$= 2 \cdot \int_{t=0}^{1.7} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$	$\approx 2 \cdot 0.45543$	Ablesen aus der Tabelle, siehe Seite 2
$= 0.91083$	$\approx 91\%$	Ausrechnen und runden

Erläuterung: Dank 5C genügt die Normalverteilung der geforderten Genauigkeit von 1%. Zur Auswertung des Integrals nutzen wir wie üblich die Tabelle der Normalverteilung, siehe Seite 2. (Es geht auch nicht anders: Die Funktion $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ ist nicht elementar integrierbar.) Die Stetigkeitskorrektur $1/2$ in $\alpha = [(\mu + 17\,000) - \mu + 1/2]/\sigma$ ist korrekt aber hier unerheblich. Nach 5B ist die Poisson–Verteilung noch genauer, für diese liegt hier aber keine Tabelle vor. Chebychev $\mathbf{P}\big(|X-\mu| \le 17\,000\big) > 65\%$ ist nur eine Ungleichung und hier viel zu grob.

3

5E. Würden Sie diese Rechnung ebenso durchführen bei spaltbarem Material, etwa Uran 235? (Hier *kann* eine Kettenreaktion entstehen, genutzt etwa als Kernreaktor oder als Kernwaffe.)

Begründete Antwort:

Nein!!! Die stochastische Unabhängigkeit der Zerfälle gilt dann nicht mehr!

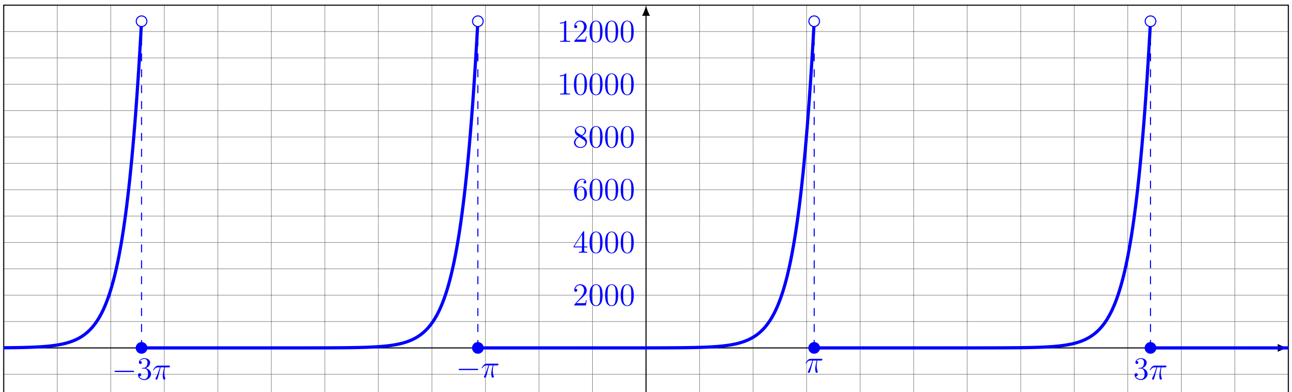
Erläuterung: Ein größerer Wert $p \in [0,1]$ ist *nicht* das Problem. Es gibt nur einen wesentlichen Unterschied: Unser obiges Modell mit $B(n,p)$ beruht auf stochastischer *Unabhängigkeit*! Kernphysik gehört natürlich nicht zur HM3, aber soviel Anwendungsbezug gehört zur Allgemeinbildung für technisch Gebildete, insbesondere angehende Ingenieure. Ein qualitatives Modell kennen Sie vielleicht aus der Schule: Die Kettenreaktion entsteht, weil beim Zerfall Neutronen emitiert werden, die von anderen Atomkernen absorbiert werden und diese zum Zerfall anregen. Das ist das Gegenteil von Unabhängigkeit!

1

Aufgabe 6. *Fourier–Reihen (1+2+3+1+3+3 = 13 Punkte)*

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$ für $-\pi\le x<\pi$.

6A. Es gilt $\mathrm{e}^{3\pi}\approx 12\,391$. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12,12]$:



Erläuterung: Die Funktion f ist nicht stetig; sie hat Sprungstellen in $x=\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\dots$. Sie erfüllt in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ die Dirichlet–Bedingung, ist aber nicht sprungnormiert. Frage 6B klärt die Grenzwerte der Fourier–Reihe dank des Satzes von Dirichlet.

1

6B. Finden Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x=0$ und $x=\pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{1}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{3\pi}+\mathrm{e}^{-3\pi}}{2}=\cosh(3\pi)}$$

2

6C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier–Reihe $f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$$ Definition der Fourier–Koeffizienten.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(3-\mathrm{i}k)x}\,\mathrm{d}x$$ Exponentialgesetz nutzen.

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3-\mathrm{i}k}\,\mathrm{e}^{(3-\mathrm{i}k)x}\right]_{-\pi}^{\pi}$$ Stammfunktion ausschreiben.

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{3-\mathrm{i}k}\Big(\mathrm{e}^{3\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}-\mathrm{e}^{-3\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}\Big)$$ Mit $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k\pi}=(-1)^k$ vereinfachen.

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi}\cdot\frac{3+\mathrm{i}k}{9+k^2}\Big(\mathrm{e}^{3\pi}-\mathrm{e}^{-3\pi}\Big)$$ Zu einem reellen Nenner erweitert.

Erläuterung: Das Integral gelingt leicht, das Ergebnis ist leider nicht rund. Das kommt vor. Hier muss man mit komplexen Zahlen rechnen können, insbesondere $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$.

3

6D. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$a_k = \frac{(-1)^k 3}{\pi(9+k^2)}\left(e^{3\pi} - e^{-3\pi}\right) \quad \text{und} \quad b_k = \boxed{\mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad = \quad \frac{(-1)^{k+1}k}{\pi(9+k^2)}\left(e^{3\pi} - e^{-3\pi}\right)}$$

1

6E. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9+k^2} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{18} + \frac{1}{25} - \frac{1}{34} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x = \boxed{0}$ ergibt:

$$1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overbrace{\cos(k\cdot 0)}^{=1} + b_k \overbrace{\sin(k\cdot 0)}^{=0}$$ Spezialisieren in $x=0$.

$$= \frac{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}{6\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k 3}{9+k^2}$$ Auflösen nach der gesuchten Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9+k^2} = -\frac{1}{18} + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} = -0.05547\dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9+k^2} = \frac{1}{18} + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} = 0.05564\dots \quad \text{(zur Information)}$$

Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet (Frage 6B), denn in $x=0$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x\pm) = f(x)$ und Ableitungen $f'(x\pm) = f'(x)$.

3

6F. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9+k^2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} + \frac{1}{25} + \frac{1}{34} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x = \boxed{\pi}$ ergibt:

$$\frac{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} + b_k \overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}$$ Spezialisieren in $x=\pi$.

$$= \frac{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}{6\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}{\pi} \cdot \frac{3}{9+k^2}$$ Auflösen nach der gesuchten Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9+k^2} = -\frac{1}{18} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} = 0.46804\dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9+k^2} = \frac{1}{18} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} = 0.57915\dots \quad \text{(zur Information)}$$

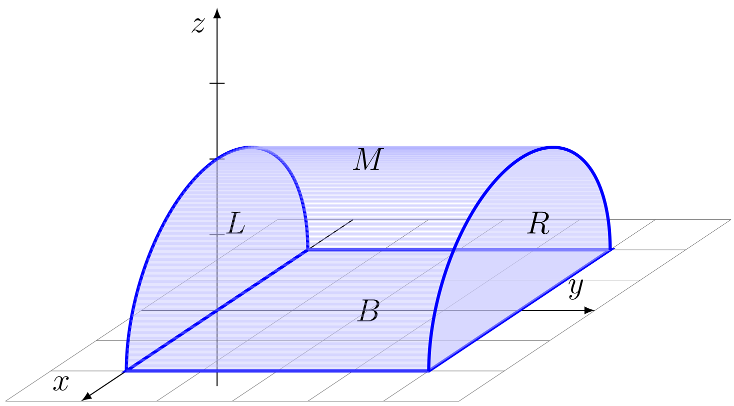
Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet (Frage 6B), denn im Punkt $x=\pi$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x\pm)$ und Ableitungen $f'(x\pm)$.

3

Aufgabe 7. *Dreidimensionale Körper und der Satz von Gauß (3+3+3+3+2 = 14 Punkte)*

7A. Skizzieren und parametrisieren Sie den Halbzylinder

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le 4,\ z \ge 0,\ 0 \le y \le 4 \,\}.$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ y \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{0} \le \rho \le \boxed{2}$$

$$\boxed{0} \le \varphi \le \boxed{\pi}$$

$$0 \le y \le 4$$ 3

7B. Berechnen Sie auf K die Quellstärke des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7z + y^3 - 4xz^2 \\ e^{-x^2/2} \cdot e^{-z^2/2} \\ 4x - z - \pi y - 4x^2 z \end{pmatrix}.$$

$$I_K := \int_K \operatorname{div} f(x,y,z)\, d(x,y,z)$$ Zunächst berechnen wir die Divergenz...

$$= \int_K (3 - 4z^2 - 1 - 4x^2)\, d(x,y,z)$$ Wir wechseln zu obigen Zylinderkoordinaten...

$$= \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{y=0}^{4} (2 - 4\rho^2)\, \rho \, dy\, d\varphi\, d\rho$$ Funktionaldeterminante ρ nicht vergessen!

$$= 4\pi \int_{\rho=0}^{2} 2\rho - 4\rho^3\, d\rho$$ Integranden soweit möglich vereinfachen.

$$= 4\pi \Big[\rho^2 - \rho^4 \Big]_{\rho=0}^{2} = -48\pi$$ Stammfunktion ausschreiben und auswerten.

Erläuterung: Sie kennen die Funktionaldeterminante $\det \Phi' = \rho$ von Zylinderkoordinaten. Diese muss hier nicht erneut berechnet werden, sondern wird gleich in der Rechnung genutzt. Man beachte, dass wir hier nur über einen Halbzylinder integrieren, daher $0 \le \varphi \le \pi$.

Wir nutzen im Folgenden den Satz von Gauß: $\int_K \operatorname{div}(f)\, d(x,y,z) = \int_{\partial K} f \bullet dS$.
Die Randfläche ∂K besteht aus Boden B, Mantel M sowie Wänden L und R.
Die Flussintegrale durch L und R heben sich offensichtlich auf. Genau hinsehen! 3

7C. Berechnen Sie den Fluss von f aus K durch die Wand $R = \{ (x,y,z) \in K \mid y = 4 \}$:

$$I_R := \int_{s\in R} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$ Die Einheitsnormale ist hier $n_D = (0,1,0)$.

$$= \int_{(x,4,z)\in D} \mathrm{e}^{-(x^2+z^2)/2}\,\mathrm{d}(x,z)$$ Wir wechseln zu obigen Polarkoordinaten...

$$= \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$ Funktionaldeterminante ρ nicht vergessen!

$$= \pi \Big[-\mathrm{e}^{-\rho^2/2} \Big]_{\rho=0}^{2} = \pi\big(1-\mathrm{e}^{-2}\big)$$ Stammfunktion ausschreiben und auswerten.

Erläuterung: Die einfache Geometrie des Körpers K vereinfacht hier etwas die Berechnung.

Das Integral kennen wir vom Gaußschen Kunstgriff zur Berechnung von $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.
Erst der zusätzliche Faktor ρ ermöglicht die einfache Stammfunktion! Ohne geht's nicht.

Der Fluss von f aus K durch den Boden $B = \{ (x,y,z) \in K \mid z = 0 \}$ ergibt das Negative!
Die Rechnung ist identisch, aber die Einheitsnormale $n_B = (0,0,-1)$ zeigt nach unten.

3

Erinnerung: Flussintegrale durch den Rand von K orientieren wir immer nach außen.

7D. Bestimmen Sie für den Boden $B = \{ (x,y,z) \in K \mid z = 0 \}$

den Schwerpunkt $m_B = \begin{pmatrix} \boxed{0 \\ 2 \\ 0} \end{pmatrix}$,

den senkrechten Feldanteil $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \bullet n_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\pi y - 4x \quad \text{(linear!)}}$,

und das Flussintegral $I_B := \int_B f \bullet \mathrm{d}S = \int_B f \bullet n_B |\mathrm{d}S| = \boxed{32\pi}$.

3

7E. Folgern Sie für die Mantelfläche $M = \{ (x,y,z) \in K \mid x^2 + z^2 = 4 \}$

das Flussintegral $I_M := \int_M f \bullet \mathrm{d}S = \boxed{I_K - I_B - I_R - I_L = -80\pi}$ Wir nutzen den Satz von Gauß!.

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.