Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/12	/14	/13	/10	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Gilt für Zufallsvariablen $X, Y : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ stets $\mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y)$?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2B. Gilt für Zufallsvariablen $X, Y : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ stets $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2C. Wenn die Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ einen doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ hat, dann existiert eine Hauptvektorkette $0 \xleftarrow{A-\lambda} u \xleftarrow{A-\lambda} v$ der Länge 2. Stimmt das immer?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2D. Wenn zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine Hauptvektorkette $0 \xleftarrow{A-\lambda} u \xleftarrow{A-\lambda} v$ der Länge 2 existiert, dann hat A den doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Stimmt das immer?

Begründete Antwort:

/2

2E. Eindeutigkeit 1: Gegeben sei eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit stetiger rechter Seite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Können sich verschiedene Lösungsfunktionen $y \neq \tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schneiden?

Begründete Antwort:

/2

2F. Eindeutigkeit 2: Die konstante Nullfunktion $\tilde{y}(x) = 0$ löst die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{|x|}\sin y(x)$. Wie viele Nullstellen hat demnach jede andere Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

/2

Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit: Kombinatorik* (*2+2+2+3+3 = 12 Punkte*)

3A. Aus einer Schublade mit 3 blauen und 6 schwarzen Socken ziehen Sie zweimal zufällig ohne Zurücklegen. Welche Wkt hat das Ereignis $V = \{\text{Sie ziehen zwei verschiedenfarbige Socken}\}$?

$\mathbf{P}(V) =$

2

3B. Aus den Losen $0, 1, 2, \dots, 9$ ziehen Sie viermal zufällig mit Zurücklegen. Berechnen Sie die Wkt $\mathbf{P}(A)$ des Ereignisses $A = \{\text{Sie ziehen vier verschiedene Zahlen}\}$. (Ergebnis in Prozent)

$\mathbf{P}(A) =$

2

3C. Berechnen Sie die Wkt $\mathbf{P}(A|B)$ unter der Bedingung $B = \{\text{Sie ziehen nur gerade Zahlen}\}$. Hier sei A wie in 3B. (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt.)

$\mathbf{P}(A|B) =$

2

3D. Aus Losen $1, 2, 3, \dots, 500$ ziehen Sie 800mal zufällig mit Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit Q ziehen Sie niemals Ihre Glückszahl 202? (Ergebnis in Prozent, ebenso gerundet)

$Q =$

$\approx$

3

3E. Aus Losen $1, 2, 3, \ldots, 500$ ziehen Sie 40mal zufällig mit Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P ziehen Sie 40 verschiedene Zahlen? (Ergebnis in Prozent, ebenso gerundet)

$P =$

$\approx$

3

Aufgabe 4. *Wahrscheinlichkeit: Grenzwertsätze* ($4+2+2+3+1 = 12$ *Punkte*)

Ein Atom Uran 238 zerfällt in der nächsten Stunde mit Wkt $p = 2 \cdot 10^{-14}$. Eine Probe von 20mg enthält etwa $n = 5 \cdot 10^{19}$ Atome. Wir nehmen die Zerfälle als stochastisch unabhängig an, insbesondere keine Kettenreaktion. Sei X die Gesamtzahl der Zerfälle in der nächsten Stunde.

4A. Nennen Sie die exakte Verteilung (in diesem vereinfachten Modell):

$\mathbf{P}(X{=}k) =$

Bestimmen Sie hierzu Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ und Streuung σ. Runden Sie das Ergebnis jeweils auf die nächstgelegene ganze Zahl.

$\mu = \mathbf{E}(X) =$

$\sigma^2 = \mathbf{V}(X) =$

$\sigma = \sqrt{\mathbf{V}(X)} =$

4

4B. Wie klein ist der totale Abstand zur Poisson–Verteilung $P(\mu)$? Kleiner als 10^{-6}?

$\big\|\mathbf{P}_X - P(\mu)\big\| \le$

2

4C. Wie klein ist der Approximationsfehler zur Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$? Kleiner als 10^{-3}?

$|\delta| \le$

2

4D. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}\big(|X-\mu| \le 2500\big)$ durch eine geeignete Näherung. Gesucht ist das Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt.

$\mathbf{P}\big(|X-\mu| \le 2500\big) \approx$

3

4E. Würden Sie diese Rechnung ebenso durchführen bei spaltbarem Material, etwa Uran 235? (Hier *kann* eine Kettenreaktion entstehen, genutzt etwa als Kernreaktor oder als Kernwaffe.)

Begründete Antwort:

1

Aufgabe 5. *Differentialgleichungen erster Ordnung (3+3+4+4 = 14 Punkte)*

5A. Bestimmen Sie die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u'(x) = -xu(x)$ und $\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

3

5B. Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(x) = x - xy(x)$ und $y(0) = 0$.

3

5C. Lösen Sie für $x > 0$ die exakte Differentialgleichung $y(x) - \cos x + xy'(x) = 0$ mit $y(\pi) = 0$.

4

5D. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor λ für $x^2 \cos x + y(x) - xy'(x) = 0$.

4

Aufgabe 6. *Differentialgleichungssysteme (4+4+1+4 = 13 Punkte)*

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 15 \\ 2 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in $\mathbb{R}^3$. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

$Av_1 =$, $Av_2 =$

$Av_3 =$, $B =$

4

6B. Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von $y'(t) = A\,y(t)$ mit $y_k(0) = v_k$.

$y_1(t) =$

$y_2(t) =$

$y_3(t) =$

Wie lautet demnach die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des DGSystems $y'(t) = A\,y(t)$?

$y(t) =$

4

6C. Welches asymptotische Verhalten hat die allgemeine Lösung $y(t)$ für $t \to \infty$?

1

6D. Lösen Sie das inhomogene DGSystem $u'(t) = A\,u(t) + \mathrm{e}^{-t}v_1$ mit $u(0) = 0$
durch den Ansatz $u(t) = u_1(t)v_1 + u_2(t)v_2 + u_3(t)v_3$ mit $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Einsetzen und Koeffizientenvergleich entkoppeln das DGSystem zu:

$u_1'(t) =$, $u_1(0) = 0$

$u_2'(t) =$, $u_2(0) = 0$

$u_3'(t) =$, $u_3(0) = 0$

Die Lösungen $u_2(t) = u_3(t) = 0$ sind dann klar. Bestimmen Sie die interessante Lösung u_1:

$u_1(t) =$

4

Aufgabe 7. *Differentialgleichungen und Laplace–Transformation (4+6 = 10 Punkte)*

7A. Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung:

$p(x) =$

2

Folgern sie hieraus die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$

2

7B. Lösen Sie durch Laplace–Transformation die inhomogene lineare Differentialgleichung $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 3 - t$ mit den Anfangswerten $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Die Laplace–Transformation $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$ übersetzt diese DG in folgende Hilfsgleichung:

Rechte Seite: $3 - t \circ\!\!-\!\!\bullet$

1

Linke Seite: $p(\partial_t)\, y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$

2

Auflösen nach Y ergibt $Y(s) =$

2

Rücktransformation zu $y(t) =$

1