Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/9	/9	/13	/14	/14	/72

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Gibt es stetig differenzierbare Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit unendlicher Länge?

Begründete Antwort:

Nein. Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gilt die **Weglängenformel**

$$\ell(\gamma) \quad = \quad \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \quad \le \quad (b-a) \cdot \max_{[a,b]} |\gamma'| \quad < \quad \infty.$$

Erläuterung: Das Intervall $[a,b]$ ist kompakt, der Integrand $|\gamma'(t)|$ ist stetig, also beschränkt. Daher hat jeder stetig differenzierbare Weg eine endliche Länge. Stetige Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hingegen können unendliche Länge haben, wie zum Beispiel die Kochsche Schneeflockenkurve.

2

2B. Wir integrieren $f(z) = 5/z - 7/z^2$ entlang des positiven Randes ∂R eines Rechtecks $R \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \partial R$. Welche Werte kann das komplexe Wegintegral $\int_{\partial R} f(z) \, \mathrm{d}z$ annehmen?

Begründete Antwort:

In $z = 0$ sieht man das **Residuum** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 5$. Dank **Residuensatz** gilt:

$$\int_{\partial R} f(z) \, \mathrm{d}z \quad = \quad 2\pi\mathrm{i} \sum_{s \in \mathring{R}} \operatorname{res}_s(f) \quad = \quad \begin{cases} 10\pi\mathrm{i} & \text{für } 0 \in \mathring{R}, \\ 0 & \text{für } 0 \in \mathbb{C} \setminus R. \end{cases}$$

Erläuterung: Der Residuensatz für holomorphe Funktionen vereinfacht viele Integrale! Die vorliegende Frage zielt auf ein besonders einfaches Beispiel, ohne Rechnung.

2

2C. Sei $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0 \,\}$ der dreidimensionale euklidische Raum ohne die z–Achse. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot}(f) = 0$, ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das **Wirbelfeld** $f(x,y,z) = (-y, x, 0)/(x^2+y^2)$.

Erläuterung: Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig für ein Potential, aber hinreichend erst für **einfach zusammenhängende** Gebiete. Das Gebiet U ist nicht einfach zusammenhängend. Vermutlich hat demnach nicht jedes rotationsfreie Vektorfeld ein Potential. Wirklich überzeugend ist aber erst ein konkretes Gegenbeispiel, etwa wie angegeben das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters entlang der z–Achse. Dieses prominente Vektorfeld wurde in Übung und Vorlesung behandelt, ausführlich und mehrfach: Auf ganz U gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$, aber dennoch gilt $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang eines geschlossenen Weges um die z–Achse. Demnach ist f zwar rotationsfrei, kann aber dennoch kein Potential auf U haben.

2

2D. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1/k}\, e^{ikx}$ die Fourier–Reihe einer quadrat-integrierbaren Funktion?

Begründete Antwort:

Nein, denn die Koeffizienten sind nicht **quadrat-summierbar**: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.

Erläuterung: Jede absolut integrierbare Funktion $f:[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ können wir in ihre Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ entwickeln. Es gilt dann:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \bigl|f(x)\bigr|^2 \,dx \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bigl|c_k\bigr|^2 \quad = \quad \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \bigl|a_k\bigr|^2 + \bigl|b_k\bigr|^2$$

Genau dann ist die Funktion f über $[0,2\pi]$ quadrat-integrierbar, das heißt $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,dx < \infty$, wenn ihre Fourier–Koeffizienten quadrat-summierbar sind, das heißt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ wurde ausführlich in HM2 und HM3 behandelt.

$\overline{2}$

2E. Gibt es stetige Funktionen $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$, sodass die beiden iterierten Integrale $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$ und $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$ verschieden sind?

Begründete Antwort:

Ja. Wir hatten ein konkretes **Gegenbeispiel** in Übung und Vorlesung,
nämlich die rationale Funktion $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$.

Erläuterung: Dieses Problem kann nur für **nicht absolut integrierbare** Funktionen auftreten, etwa eine **unbeschränkte Funktion** $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ mit Polstellen auf dem Rand des Quadrates. Das angegebene Beispiel wurde in Übung und Vorlesung behandelt: Hier finden wir $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = +\pi/4$ und $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy = -\pi/4$.

$\overline{2}$

2F. Gibt es stetige Funktionen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass die beiden iterierten Integrale $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$ und $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$ verschieden sind?

Begründete Antwort:

Nein, dieses Problem kann nicht auftreten. Der Integrationsbereich $[0,1]^2$ ist **kompakt**. Jede stetige Funktion $f:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ ist daher **beschränkt**. Insbesondere ist f über $[0,1]^2$ **absolut integrierbar**. Der Satz von **Fubini** garantiert dann die Gleichheit der Integrale

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$\overline{2}$

Aufgabe 3. *Der Residuensatz* (*2+2+2+3 = 9 Punkte*)

3A. Bestimmen Sie das Integral

$$F(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{2}\int_{u=0}^{x/2} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\arctan(u)\right]_{u=0}^{x/2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2

Hinweis: Das Ergebnis genügt. Die Probe ist leicht und fängt Rechenfehler ab.

3B. Bestimmen Sie mit der vorigen Aufgabe das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \boxed{2\int_{t=0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

2

3C. Bestimmen Sie für $u \in \mathbb{C}$ das Residuum $\operatorname{res}_z\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}/(z^2+4)\big)$ in den Polstellen $z = \pm 2\mathrm{i}$:

$$\operatorname*{res}_{z=2\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+4}\right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-2u}}{4\mathrm{i}}}\;,\qquad \operatorname*{res}_{z=-2\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+4}\right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{+2u}}{-4\mathrm{i}}}$$

2

3D. Berechnen Sie für $u \geq 0$ das Integral

$\widehat{f}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$	Reell ist's schwierig...
$= \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+4}\,\mathrm{d}z$	Komplex geht's leichter!
$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Re}(s)>0}\operatorname*{res}_{z=s}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+4}\right)$	Wir nutzen den Residuensatz.
$= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2u}}{4\mathrm{i}} \quad = \quad \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2u}.$	Wir setzen 3C ein. Fertig!

Erläuterung: Mit dem Residuensatz können wir (auch reelle) Integrale leicht berechnen. Diese Rechnung wurde in der Vorlesung ausgeführt und die allgemeine Technik geübt; sie dient schließlich zur Fourier–Transformation, daher nutze ich hier die Schreibweise $\widehat{f}$. *Nicht richtig* ist es, den Integranden $\cos(ux)/(x^2+4)$ wie eine rationale Funktion zu behandeln und den Residuensatz naiv auf $f(z) = \cos(uz)/(z^2+4)$ anzuwenden, oder die ähnliche Rechnung für $\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ux)/(x^4+4)\,\mathrm{d}x$ aus der Vorlesung hier abzuschreiben.

3

Probe: Sie kennen $\widehat{f}(0)$ aus Frage 3B. Zudem gilt $\lim_{u\to\infty}\widehat{f}(u) = 0$ dank Riemann–Lebesgue.

Aufgabe 4. *Integralsätze in der Ebene (4+3+2 = 9 Punkte)*

4A. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s$ des Vektorfeldes $f(x,y) = (0, 3x)$ entlang des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (1-\sin t)\cdot(\cos t, 2\sin t)$. *Hinweis:* Es gilt $2 \sin t \cos t = \sin(2t)$.

$$\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{Definition}$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 3(1-\sin t)\cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} (-\cos t)\cdot\cos t + (1-\sin t)\cdot(-\sin t) \\ (-\cos t)\cdot 2\sin t + (1-\sin t)\cdot 2\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \qquad \text{Einsetzen}$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \big[3\cos t - 3\sin t\cos t\big] \cdot \big[2\cos t - 4\sin t\cos t\big]\,\mathrm{d}t \qquad \text{Produkt}$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} 6\cos^2 t - 18\sin t\cos^2 t + 12\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad \text{Ausrechnen}$$

$$= 6\int_{t=0}^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t - 18\int_{t=-\pi}^{\pi} \sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t + 3\int_{t=0}^{2\pi} \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{Vereinfachen}$$

$$= 6\pi + 0 + 3\pi \quad = \quad 9\pi \qquad \text{Integrale}$$

Erläuterung: Die Rechnung zur Herzkurve wurde in der Vorlesung vorgeführt (und hier nur leicht verändert). Periodenintegrale über Produkte von $\sin t$ und $\cos t$ kennen wir gut von Fourier–Reihen, damit kann man die obigen Integrale geschickt und zügig auswerten. Alternativ kann man auch direkt die Stammfunktion zu $18\sin t\cos^2 t$ ausschreiben.

Dieses Beispiel dient hier als Anwendung zum Satz von Green und der Flächenformel. Die beiden folgenden Fragen nutzen den Satz von Green in beide Richtungen.

4

4B. Folgern Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(H)$ der vom Weg γ umschlossenen Fläche $H \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{vol}_2(H) = \int_H 1\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{3}\int_H \mathrm{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{3}\int_\gamma f(s)\bullet\mathrm{d}s = 3\pi \qquad \text{Satz von Green!}$$

3

4C. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma g(s) \bullet \mathrm{d}s$ des Vektorfeldes $g(x,y) = (-3y, 2x)$.

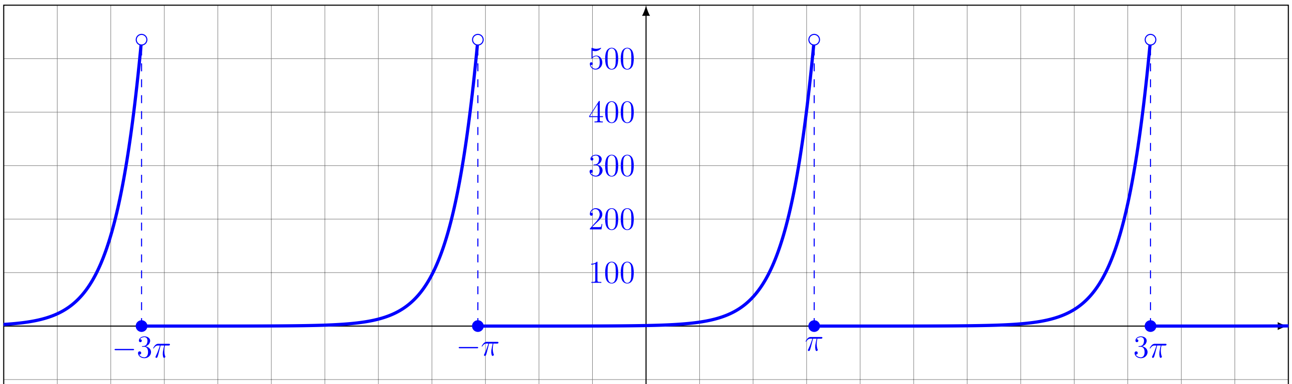
$$\int_\gamma g(s)\bullet\mathrm{d}s = \int_H \mathrm{rot}(g)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_H 5\,\mathrm{d}(x,y) = 5\,\mathrm{vol}_2(H) = 15\pi \qquad \text{Satz von Green!}$$

2

Aufgabe 5. *Fourier–Reihen* (*1+2+3+1+3+3 = 13 Punkte*)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ für $-\pi \le x < \pi$.

5A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



Erläuterung: Die Funktion f ist nicht stetig; sie hat Sprungstellen in $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$.
Sie erfüllt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Dirichlet–Bedingung, ist aber nicht sprungnormiert.
Frage 5B klärt die Grenzwerte der Fourier–Reihe dank des Satzes von Dirichlet. 1

5B. Finden Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x = 0$ und $x = \pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{1}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{2\pi} + \mathrm{e}^{-2\pi}}{2} = \cosh(2\pi)}$$

2

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x$$

Definition der Fourier–Koeffizienten.

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(2-\mathrm{i}k)x}\, \mathrm{d}x$$

Exponentialgesetz nutzen.

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2 - \mathrm{i}k} \mathrm{e}^{(2-\mathrm{i}k)x} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Stammfunktion ausschreiben.

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2 - \mathrm{i}k} \left(\mathrm{e}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} \right)$$

Mit $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\pi} = (-1)^k$ vereinfachen.

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi} \cdot \frac{2 + \mathrm{i}k}{4 + k^2} \left(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi} \right)$$

Zu einem reellen Nenner erweitert.

Erläuterung: Das Integral gelingt leicht, das Ergebnis ist leider nicht rund. Das kommt vor.
Hier muss man mit komplexen Zahlen rechnen können, insbesondere $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. 3

5D. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$a_k = \boxed{c_k + c_{-k} \quad = \quad \frac{(-1)^k 2}{\pi(4+k^2)}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)}$$

und $b_k = -\frac{k}{2} a_k$ (zur Probe) 1

5E. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4+k^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} + \frac{1}{29} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x = \boxed{\pi}$ ergibt:

$$\frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} + b_k \overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}$$

Spezialisieren in $x = \pi$.

$$= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \cdot \frac{2}{4+k^2}$$

Auflösen nach der gesuchten Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4+k^2} = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = 0.66040\dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4+k^2} = \frac{1}{8} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = 0.91040\dots \quad \text{(zur Information)}$$

Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet (Frage 5B), denn im Punkt $x = \pi$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x\pm)$ und Ableitungen $f'(x\pm)$. 3

5F. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4+k^2} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \frac{1}{20} - \frac{1}{29} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x = \boxed{0}$ ergibt:

$$1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overbrace{\cos(k \cdot 0)}^{=1} + b_k \overbrace{\sin(k \cdot 0)}^{=0}$$

Spezialisieren in $x = 0$.

$$= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k 2}{4+k^2}$$

Auflösen nach der gesuchten Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4+k^2} = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = -0.12353\dots$$

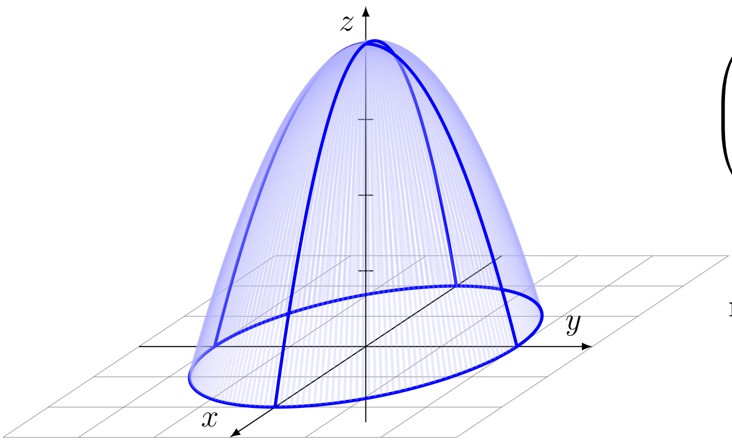
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4+k^2} = \frac{1}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = 0.12646\dots \quad \text{(zur Information)}$$

Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet (Frage 5B), denn in $x = 0$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x\pm) = f(x)$ und Ableitungen $f'(x\pm) = f'(x)$. 3

Aufgabe 6. *Flächen im Raum und der Satz von Stokes (3+2+4+5 = 14 Punkte)*

6A. Skizzieren und parametrisieren Sie das Rotationsparaboloid

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z = 4 - x^2 - y^2 \}.$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \boxed{4-\rho^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{cases} 0 \le \rho \le \boxed{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

3

6B. Berechnen Sie die Flächennormale

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\varphi} \\ \boxed{\sin\varphi} \\ \boxed{-2\rho} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{-\rho\sin\varphi} \\ \boxed{+\rho\cos\varphi} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2\rho^2\cos\varphi} \\ \boxed{2\rho^2\sin\varphi} \\ \boxed{\rho} \end{pmatrix}.$$

2

6C. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche S:

$$\mathrm{vol}_2(S) = \int_S 1\,|\mathrm{d}S|$$ Der Flächeninhalt ist ein spezielles Integral.

$$= \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{4\rho^4 + \rho^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$ Flächenverzerrung: Die Norm $|\mathrm{d}S|$ berechnen.

$$= \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$ Integrand vereinfachen soweit möglich.

$$= 2\pi \left[\frac{1}{12} \left(4\rho^2 + 1\right)^{3/2} \right]_{\rho=0}^{2}$$ Stammfunktion finden, die Probe ist leicht.

$$= \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 1\right) \quad = \quad 36.1769\ldots$$ Auswerten soweit möglich.

Erläuterung: Die Vorbereitungen aus 6A und 6B erleichtern die Rechnung. Das Integral ist überraschend leicht, aber das Ergebnis ist leider nicht ganz so rund. Das kommt vor.

4

Plausibilitätscheck: Die Skizze suggeriert $30 < \mathrm{vol}_2(S) < 40$. Es gilt $17^{3/2} \approx 70$.

6D. Berechnen Sie den Fluss $\int_S f \bullet \mathrm{d}S$ des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \underbrace{\begin{pmatrix} 2y\,\mathrm{e}^{xz} \\ 5x\,\mathrm{e}^{yz} \\ \mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}}_{=:g} = \begin{pmatrix} +x\,\mathrm{e}^{xy} - 5xy\,\mathrm{e}^{yz} \\ -y\,\mathrm{e}^{xy} + 2xy\,\mathrm{e}^{xz} \\ 5\,\mathrm{e}^{yz} - 2\,\mathrm{e}^{xz} \end{pmatrix}$$

durch die Fläche S nach oben (in positive z–Richtung). Nutzen Sie hierzu ein Wegintegral.

$$\int_{s\in S} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$ Es gilt $f = \operatorname{rot}(g)$ wie angegeben.

$$= \int_{s\in S} \operatorname{rot}(g) \bullet \mathrm{d}S = \int_{s\in\partial S} g(s) \bullet \mathrm{d}s$$ Wir nutzen den Satz von Stokes.

$$= \int_{t=0}^{2\pi} g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$ Wir parametrisieren ∂S durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$= \int_{t=0}^{2\pi} g\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$ Den Weg ins Wegintegral einsetzen und...

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 4\sin t \\ 10\cos t \\ \mathrm{e}^{4\cos t \sin t} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$ Das Vektorfeld g auswerten.

$$= \int_{t=0}^{2\pi} 20\cos^2 t - 8\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$ Das Skalarprodukt ausmultiplizieren.

$$= 20\pi - 8\pi \quad = \quad 12\pi$$ Integrale auswerten.

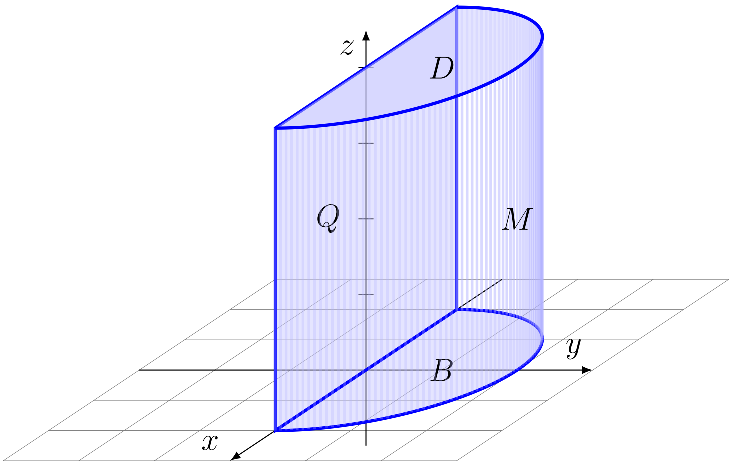
Erläuterung: Periodenintegrale über $\cos^2 t$ und $\sin^2 t$ und ähnliche kennen wir gut von Fourier–Reihen, damit kann man die obigen Integrale geschickt und zügig auswerten.

$\overline{}$ 5

Aufgabe 7. *Dreidimensionale Körper und der Satz von Gauß (3+3+3+3+2 = 14 Punkte)*

7A. Skizzieren und parametrisieren Sie den Halbzylinder

$$K = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 4\ \}.$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{0} \le \rho \le \boxed{2}$$

$$\boxed{0} \le \varphi \le \boxed{\pi}$$

$$0 \le z \le 4$$

3

7B. Berechnen Sie auf K die Quellstärke des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7y + z^3 + 4xy^2 \\ 4x - y - \pi z + 4yx^2 \\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot \mathrm{e}^{-y^2/2} \end{pmatrix}.$$

$\displaystyle\int_K \operatorname{div} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$	Zunächst berechnen wir die Divergenz…
$\displaystyle= \int_K (3 + 4y^2 - 1 + 4x^2)\,\mathrm{d}(x,y,z)$	Wir wechseln zu obigen Zylinderkoordinaten…
$\displaystyle= \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{z=0}^{4} (2 + 4\rho^2)\,\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$	Funktionaldeterminante ρ nicht vergessen!
$\displaystyle= 4\pi \int_{\rho=0}^{2} 2\rho + 4\rho^3\,\mathrm{d}\rho$	Integranden soweit möglich vereinfachen.
$\displaystyle= 4\pi \Big[\rho^2 + \rho^4\Big]_{\rho=0}^{2} = 80\pi$	Stammfunktion ausschreiben und auswerten.

Erläuterung: Sie kennen die Funktionaldeterminante $\det\Phi' = \rho$ von Zylinderkoordinaten. Diese muss hier nicht erneut berechnet werden, sondern wird gleich in der Rechnung genutzt. Man beachte, dass wir hier nur über einen Halbzylinder integrieren, daher $0 \le \varphi \le \pi$.

Wir nutzen im Folgenden den Satz von Gauß: $\int_K \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial K} f \bullet \mathrm{d}S$.
Die Randfläche ∂K besteht aus Deckel D, Boden B, Mantel M und Schnittfläche Q.
Die Flussintegrale durch B und D heben sich offensichtlich auf. Genau hinsehen!

3

7C. Berechnen Sie den Fluss von f aus K durch den Deckel $D = \{\, (x,y,z) \in K \mid z = 4 \,\}$:

$$\int_{s\in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$
Die Einheitsnormale ist hier $n_D = (0,0,1)$.

$$= \int_{(x,y,4)\in D} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y)$$
Wir wechseln zu obigen Polarkoordinaten...

$$= \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$
Funktionaldeterminante ρ nicht vergessen!

$$= \pi \Big[-\mathrm{e}^{-\rho^2/2} \Big]_{\rho=0}^{2} \quad = \quad \pi\big(1-\mathrm{e}^{-2}\big)$$
Stammfunktion ausschreiben und auswerten.

Erläuterung: Die einfache Geometrie des Körpers K vereinfacht hier etwas die Berechnung. Ebenso gut kann man D wie in 7A parametrisieren (mit $z=0$) und die Flächennormale $\partial_\rho\Phi \times \partial_\varphi\Phi = (0,0,\rho)$ verwenden. (Diesem Rechenweg sind wir in Aufgabe 6 gefolgt.)

Das Integral kennen wir vom Gaußschen Kunstgriff zur Berechnung von $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. Erst der zusätzliche Faktor ρ ermöglicht die einfache Stammfunktion! Ohne geht's nicht.

Der Fluss von f aus K durch den Boden $B = \{\, (x,y,z) \in K \mid z = 0 \,\}$ ergibt das Negative! Die Rechnung ist identisch, aber die Einheitsnormale $n_B = (0,0,-1)$ zeigt nach unten.

3

7D. Bestimmen Sie für das Randflächenstück $Q = \{\, (x,y,z) \in K \mid y = 0 \,\}$

den Schwerpunkt $$m_Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

den senkrechten Feldanteil $$f\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \bullet n_Q \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\pi z - 4x \qquad \text{(linear!)}},$$

und hiermit das Flussintegral $$\int_Q f \bullet \mathrm{d}S = \int_Q f \bullet n_Q |\mathrm{d}S| = \boxed{32\pi}.$$

3

7E. Folgern Sie für die Mantelfläche $M = \{\, (x,y,z) \in K \mid x^2+y^2 = 4 \,\}$

das Flussintegral $$\int_M f \bullet \mathrm{d}S = \boxed{\begin{array}{l} 80\pi - 32\pi - (1-1)\pi(1-\mathrm{e}^{-2}) \\ = 48\pi \qquad \text{(Satz von Gauß!)} \end{array}}.$$

2