

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; bearbeiten Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/13	/11	/12	/14	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 4. Differentialgleichungssysteme (6+4+3 = 13 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in \mathbb{R}^4 und schreiben Sie jeden als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 . Wählen Sie v_4 so, dass $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis des \mathbb{R}^4 aus Hauptvektorketten zu A ist. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}}$ bezüglich dieser Basis \mathcal{B} . Faktorisieren Sie das charakteristische Polynom $p_A(x)$.

$Av_1 =$,	$Av_2 =$
$Av_3 =$,	$v_4 =$
$B =$,	$p_A(x) =$

6

4B. Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $y'_k(t) = Ay_k(t)$ und $y_k(0) = v_k$.

$y_1(t) =$

$$y_2(t) =$$

$$y_3(t) =$$

$$y_4(t) =$$

 4

4C. Das inhomogene Differentialgleichungssystem $u'(t) = A u(t) + 2te^{2t}v_1$ besitzt Lösungen der Form $u(t) = c(t) y_1(t)$. Leiten Sie diesen Ansatz ab und nutzen Sie $y_1'(t) = A y_1(t)$:

$$u'(t) =$$

$$\stackrel{!}{=} A c(t) y_1(t) + 2te^{2t}v_1$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten Sie eine Gleichung für $c'(t)$:

$$c'(t) =$$

Hieraus erhalten Sie eine Lösungsfunktion:

$$c(t) =$$

 3

Aufgabe 5. *Differentialgleichungen* (2+2+2+1+2+2 = 11 Punkte)**5A.** Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$.Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über \mathbb{C} :

$p(x) =$

Folgern sie hieraus die allgemeine reelle Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$

 $\frac{1}{2}$ **5B.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$.

Ansatz:

$y(t) =$

Lösung:

$y(t) =$

 $\frac{1}{2}$ **5C.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{it}$.

$y(t) =$

Leiten Sie eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 10 \cos(t)$ ab.

$y(t) =$

 $\frac{1}{2}$

5D. Nennen Sie die allgem. Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 10 \cos(t) - 6 e^t$:

$y(t) =$

1

Wir untersuchen für $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^2 u(x, y) + 10 \partial_x u(x, y) = \partial_y^2 u(x, y).$$

Gesucht sind alle nicht-trivialen Lösungen in Produktform $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$.

5E. Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $v(x)$:

Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $w(y)$:

2

5F. Bestimmen Sie speziell für $w(y) = \cos(4y)$ die zugehörige Gleichung für $v(x)$:

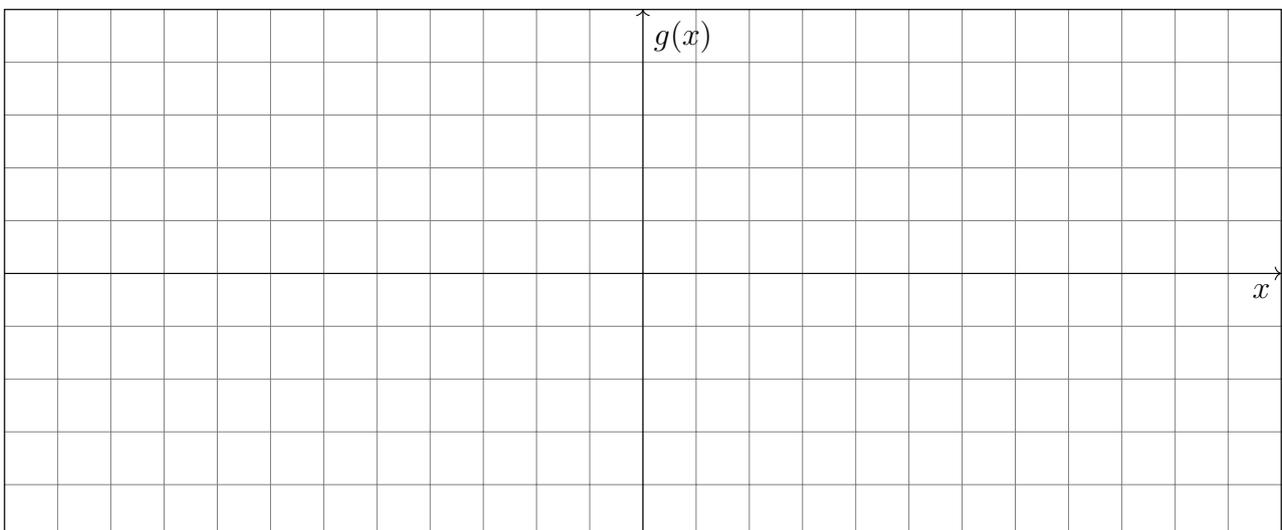
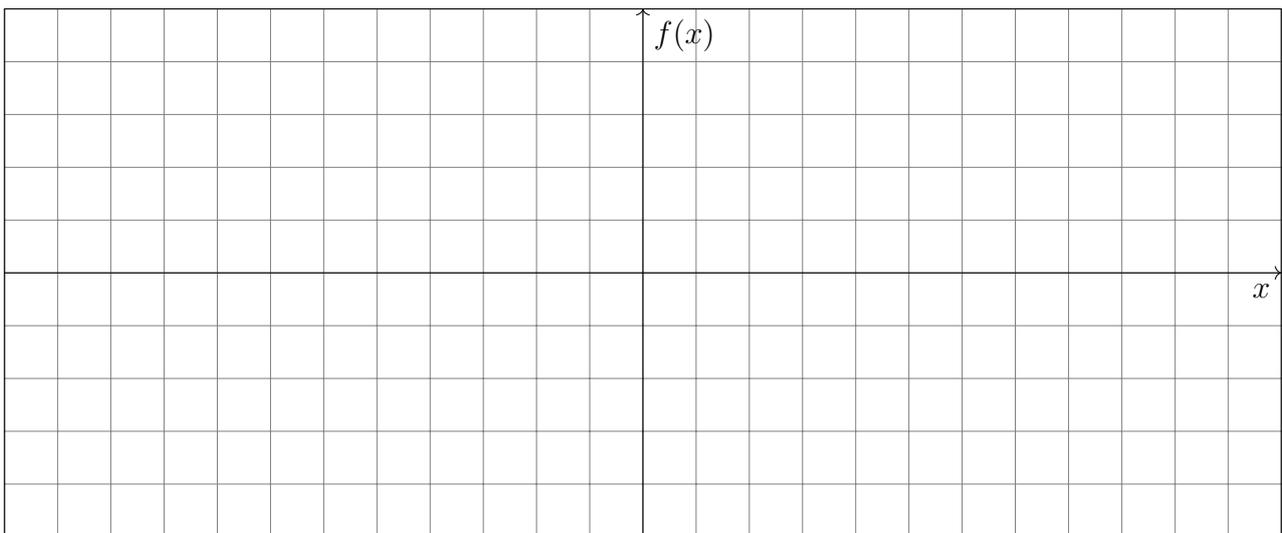
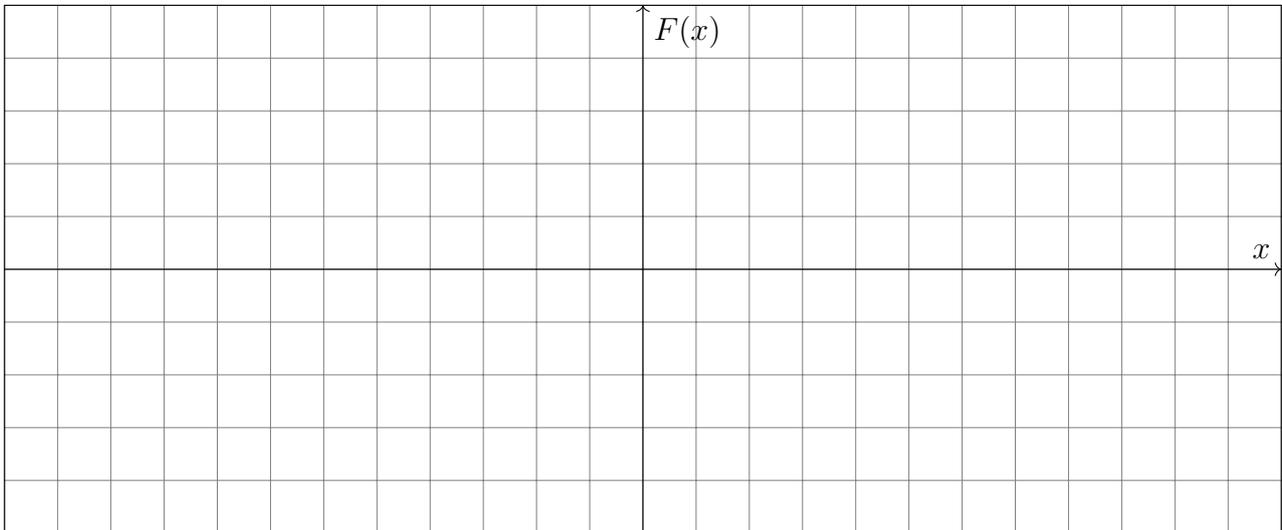
Nennen Sie alle Lösungen $u(x, y) = v(x) \cdot \cos(4y)$ unserer partiellen Differentialgleichung:

2

Aufgabe 6. *Fourier-Reihen* (3+6+3 = 12 Punkte)

6A. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade und 2π -periodisch mit $F(x) = x(\pi - x)$ für $0 < x < \pi$.

Skizzieren Sie die Funktionen F sowie ihre Ableitungen $f = F'$ und $g = F''$ auf $[-12, 12]$:

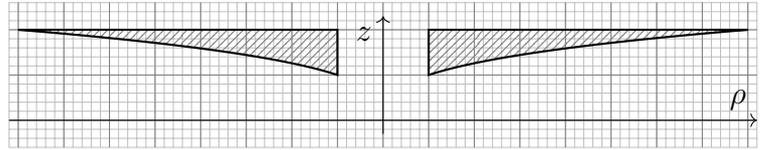
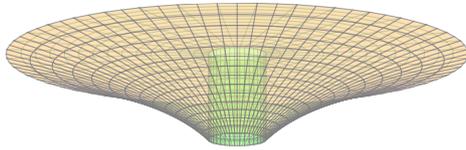




Aufgabe 7. *Integration über Körper und Flächen* (6+2+3+2+1 = 14 Punkte)

Wir betrachten folgenden Rotationskörper mit zentraler Ausbohrung:

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq z \leq 2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq z^6 \}.$$



7A. Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad 1 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \boxed{} \leq \rho \leq \boxed{}.$$

Berechnen Sie den Normalenvektor der Mantelfläche $M = \{ (x, y, z) \in K \mid x^2 + y^2 = z^6 \}$:

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} = \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

3

Berechnen Sie hiermit den Flächeninhalt von M . *Plausibilitätsprobe:* $(\sqrt{145^3} - \sqrt{10^3})/27 \approx 63.5$.

$\text{vol}_2(M) =$

3

7B. Bestimmen Sie auf K die Quelledichte und die Quellstärke des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 \\ e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \end{pmatrix} : \quad \text{div } f = \boxed{}, \quad \int_K \text{div } f \, dV = \boxed{}$$

2

7C. Berechnen Sie den Fluss von f durch den Deckel $D = \{ (x, y, z) \in K \mid z = 2 \}$ nach außen:

$$I_D := \int_{s \in D} f(s) \cdot dS =$$

3

7D. Berechnen Sie den Fluss von f durch den Zylinder $Z = \{ (x, y, z) \in K \mid x^2 + y^2 = 1 \}$:

$$I_Z := \int_{s \in Z} f(s) \cdot dS =$$

2

7E. Bestimmen Sie schließlich den Fluss I_M von f durch die Mantelfläche M nach außen:

1

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.