Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; bearbeiten Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/14	/11	/12	/13	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung, etwa durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten (Gegen-)Beispiels.

2A. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und monoton fallend mit $f(x) \searrow 0$ für $x \to \infty$.
Ist die Funktion f dann (absolut) integrierbar, also $\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$?

Begründete Antwort:

2

2B. Wir integrieren $f(z) = \cos(3z)/z^3$ entlang des positiv orientierten Randes ∂R eines Rechtecks $R \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \partial R$. Welche Werte kann das komplexe Wegintegral $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$ annehmen?

Begründete Antwort:

2

2C. Wir betrachten die Differentialgleichung $u'(t) = \sqrt[3]{\cos(t)^2} \cdot \sin(u(t))$.
Gibt es Lösungen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(0) < v(0)$ aber $u(1) > v(1)$?

Begründete Antwort:

2

2D. Sei $U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2) = 0\}$ der Raum ohne die drei Koordinatenachsen. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot}(f) = 0$, ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2E. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/\sqrt{k}$ stetig?

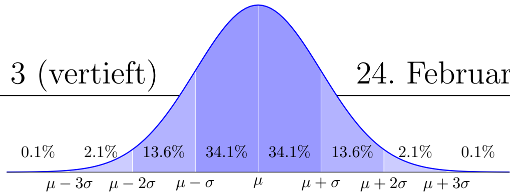
Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2F. Gibt es Matrizen $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mit einer Hauptvektorkette der Länge 5?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+4+3 = 11 Punkte)*

3A. In der Produktion entstehen Teile der Güteklasse A mit Wkt 10%, B mit 50% und C mit 40% (zufällig und unabhängig). Sie produzieren 10 000 Teile, davon sei X die Anzahl der Teile der Güteklasse A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p können Sie 950 Teile der Güteklasse A liefern? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

Erwartung $\mu(X) =$

Streuung $\sigma(X) =$

$p \approx$

4

3B. Die Feststellung der Güteklasse ist aufwändig und teuer. Die Forschungsabteilung erprobt daher einen kostensparenden Schnelltest für die Güteklasse A. Teile der Klasse A bestehen ihn mit Wkt 100%, Klasse B mit 20%, Klasse C mit 12.5% (zufällig und unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) besteht ein zufällig aus der Produktion kommendes Teil diesen Test?

2

Das Teil besteht den Test. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) ist es von Güteklasse A?

2

3C. Zur Weihnachtsfeier planen Sie folgende Tombola: Die 500 Mitarbeiter bekommen die Losnummern $\{1, 2, \dots, 500\}$. Es werden 25 zufällig gezogen – allerdings mit Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p wird mindestens ein Los zweimal gezogen? (Ergebnis in Prozent)

Exakt

Näherung

3

Aufgabe 4. *Differentialgleichungssysteme (4+4+3+3 = 14 Punkte)*

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4A. Berechnen Sie die drei Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in $\mathbb{R}^3$ und schreiben Sie jeden als Linearkombination bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

$Av_1 =$, $Av_2 =$

$Av_3 =$, $B =$

4

4B. Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $y_k'(t) = A\,y_k(t)$ und $y_k(0) = v_k$.

$y_1(t) =$

$y_2(t) =$

$y_3(t) =$

Welches asymptotische Verhalten hat die Lösung $y_3(t)$ für $t \to \infty$?

4

4C. Das inhomogene Differentialgleichungssystem $u'(t) = A\,u(t) + 4\mathrm{e}^{2t}v_1$ besitzt Lösungen der Form $u(t) = c(t)\,y_1(t)$. Leiten Sie diesen Ansatz ab und nutzen Sie $y_1'(t) = A\,y_1(t)$:

$u'(t) =$ $\boxed{}$ $\stackrel{!}{=} A\,c(t)\,y_1(t) + 4\mathrm{e}^{2t}v_1$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten Sie eine Gleichung für $c'(t)$:

$c'(t) =$ $\boxed{}$

Hieraus erhalten Sie leicht die gesuchte Funktion:

$c(t) =$ $\boxed{}$

3

4D. Wir betrachten für eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$(3x-4y)\partial_x\,u(x,y) + (2y-x)\partial_y\,u(x,y) = u(x,y) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = \sin(x).$$

Formulieren Sie das gewöhnliche Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, sodass $u(x(t), y(t)) = z(t)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

3

Aufgabe 5. *Differentialgleichungen (2+2+2+1+2+2 = 11 Punkte)*

5A. Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung:

$p(x) =$

Folgern sie hieraus die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$

$\overline{}\,2$

5B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = \mathrm{e}^{-3t}$.

Ansatz:

$y(t) =$

Lösung:

$y(t) =$

$\overline{}\,2$

5C. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

$y(t) =$

Leiten Sie daraus eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 50\cos(t)$ ab.

$y(t) =$

$\overline{}\,2$

5D. Nennen Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 10\,\mathrm{e}^{-3t} + 50\cos(t)$:

$y(t) =$

1

Wir untersuchen nun für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^2\, u(x,y) + 6\,\partial_x\, u(x,y) = \partial_y^2\, u(x,y).$$

Gesucht sind alle nicht-trivialen Lösungen in Produktform $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$.

5E. Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $v(x)$:

Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $w(y)$:

2

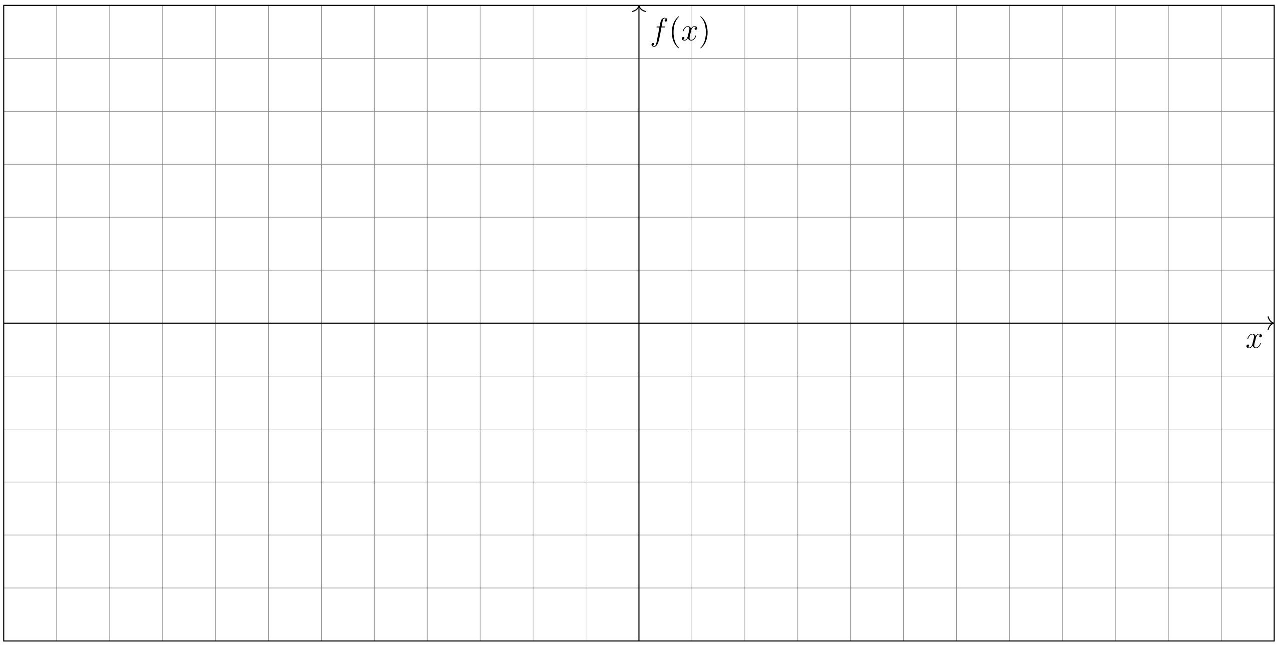
5F. Bestimmen Sie speziell für $w(y) = \cos(3y)$ die zugehörige Gleichung für $v(x)$:

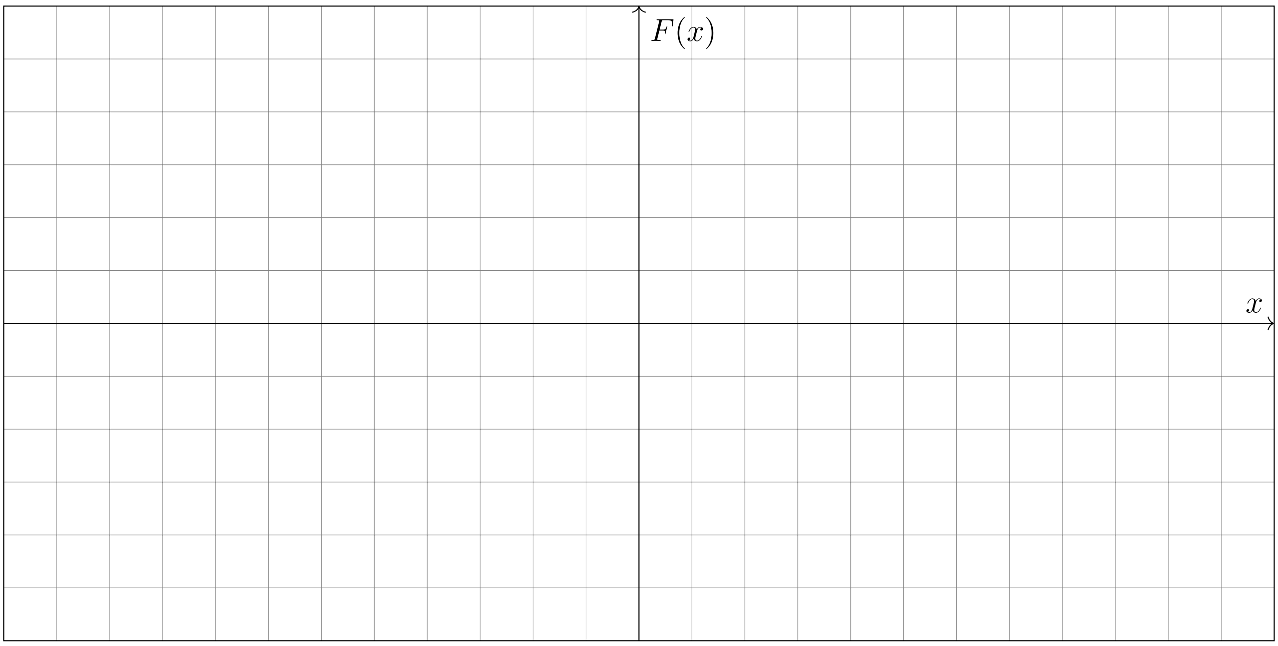
Nennen Sie alle Lösungen $u(x,y) = v(x) \cdot \cos(3y)$ unserer partiellen Differentialgleichung:

2

Aufgabe 6. *Fourier–Reihen (2+2+3+2+3 = 12 Punkte)*

6A. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x) = 2x + \pi$ für $-\pi < x < 0$ und $f(x) = 0$ für $0 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$ und $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ auf $[-12, 12]$:





$\overline{}$ 2

6B. Finden Sie die Grenzwerte der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f in $x \in \{0, \pi\}$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(0) =$ $\boxed{}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) =$ $\boxed{}$

$\overline{}$ 2

6C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

Es gilt $a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \ge 0 \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \ge 1 \text{ ungerade.} \end{cases}$

$b_k =$

3

6D. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von f an der Stelle $x = \pi$ den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots$.

2

6E. Folgern Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$A_0 =$

$A_k =$

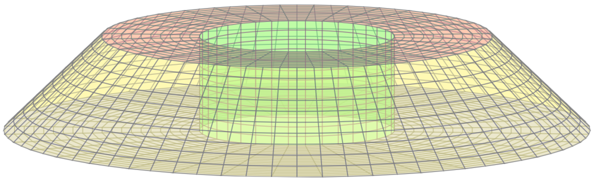
$B_k =$

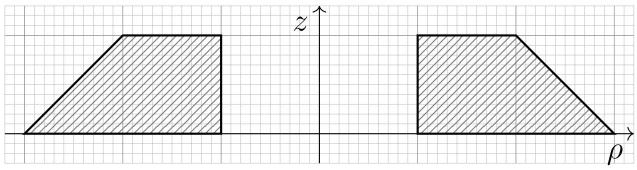
3

Aufgabe 7. *Integration über Körper und Flächen (5+1+3+3+1 = 13 Punkte)*

Wir betrachten folgenden Kegelstumpf mit zentraler Ausbohrung:

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\ 1 \le x^2 + y^2 \le (3 - z)^2 \}.$$





7A. Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \le z \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \boxed{} \le \rho \le \boxed{}.$$

Berechnen Sie für die äußere Mantelfläche $M = \{ (x, y, z) \in K \mid x^2 + y^2 = (3 - z)^2 \}$ den Normalenvektor, seine Länge sowie den Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(M)$:

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} = \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$\left| \frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} \right| = \boxed{}, \quad \operatorname{vol}_2(M) = \boxed{}$$

5

7B. Wir betrachten im Folgenden das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 x \\ x^2 y \\ e^{x^2/2} \cdot e^{y^2/2} \end{pmatrix}.$$

Der Fluss $I_Z = \int_{s \in Z} f(s) \bullet \mathrm{d}S$ durch den inneren Zylinder $Z = \{ (x, y, z) \in K \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ ist Null. Nennen Sie den geometrischen Grund:

$\boxed{}$

1

7C. Berechnen Sie die Quellstärke des Vektorfeldes f auf K:

$$I_K := \int_K \operatorname{div} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$

3

7D. Berechnen Sie den Fluss von f durch den Deckel $D = \{ (x,y,z) \in K \mid z = 1 \}$ nach außen:

$$I_D := \int_{s\in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$

3

7E. Der Fluss durch den Boden $B = \{ (x,y,z) \in K \mid z = 0 \}$ nach außen ergibt ebenso $I_B = 2\pi(\mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^{9/2})$. Bestimmen Sie den Fluss I_M von f durch den Mantel M nach außen:

1

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.