Blatt 9

Aufgabe 1: Disjunkte Vereinigung

Seien $X = \operatorname{Spec} A$ und $Y = \operatorname{Spec} B$ affine Schemata und $X \sqcup Y$ ihre disjunkte Vereinigung. Zeigen Sie, dass $X \sqcup Y = \operatorname{Spec} A \times B$ (insbesondere ist also $X \sqcup Y$ wieder ein affines Schema.)

Aufgabe 2: Über Proj

Seien $S = \bigoplus_{i \geqslant 0} S_i$ und $T = \bigoplus_{i \geqslant 0} T_i$ gradierte Ringe und $\varphi : S \to T$ ein Morphismus gradierter Ringe, also $\varphi(S_i) \subseteq T_i$.

(i) Zeigen Sie dass $\operatorname{Proj} S = \varnothing$ dann und nur dann wenn jedes Element von S_+ nilpotent ist.

(ii) Sei $U := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T \mid \varphi(S_+) \nsubseteq \mathfrak{p}\}$. Zeigen Sie dass U eine offene Teilmenge von $\operatorname{Proj} T$ ist und dass φ einen natürlichen Morphismus $f : U \to \operatorname{Proj} S$ induziert.

Aufgabe 3: Arithmetisches Geschlecht

Sei Y eine Varietät der Dimension r in P^n mit Hilbertpolynom P_Y. Wir definieren das arithmetische Geschlecht durch

$$p_a(Y) := (-1)^r (P_Y(0) - 1).$$

Zeigen Sie:

(i) $p_a(\mathrm{P}^n) = 0$.

(ii) Ist Y eine ebene Kurve vom Grad d, so gilt

$$p_a(Y) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

(iii) Allgemeiner, ist H eine Hyperfläche des P^n, so hat man

$$p_a(Y) = \binom{d-1}{n}.$$

(iv) Ist Y der vollständige Durchschnitt zweier Flächen vom Grad a bzw. b im P^3, so gilt

$$p_a(Y) = \frac{1}{2}ab(a+b-4) + 1.$$

(v) Seien $Y^r \subseteq \mathrm{P}^n$ und $Z^s \subseteq \mathrm{P}^m$ Varietäten der angegebenen Dimensionen. Weiter sei $N := mn + m + n$. Wir betten $Y \times Z$ ein in den P^N mit Hilfe der Segreeinbettung

$$Y \times Z \subset \mathrm{P}^n \times \mathrm{P}^m \subset \mathrm{P}^N.$$

Dann gilt

$$p_a(Y \times Z) = p_a(Y)p_a(Z) + (-1)^s p_a(Y) + (-1)^r p_a(Z).$$

Hinweis zu b) - d): Sei $Y \subseteq \mathrm{P}^n$ eine Hyperfläche definiert durch ein homogenes Polynom vom Grad d. Dann ist d gleich $(n-1)!$ multipliziert mit dem führenden Koeffizienten von $p_a(Y)$.