Blatt 8

Aufgabe 1: Verklebelemma

Sei $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ eine Familie von Schemata und seien $U_{i,j} \subset X_i$ $(i \neq j)$ offene Mengen mit Isomorphismen $\varphi_{i,j} = (f_{i,j}, f^*_{i,j}) : (U_{i,j}, \mathcal{O}_X|_{U_{i,j}}) \to (U_{j,i}, \mathcal{O}_X|_{U_{j,i}})$, so dass folgende Kozykelbedingungen

(i) $\varphi_{i,j} = \varphi^{-1}_{j,i}$,

(ii) $\varphi_{i,j}(U_{i,j} \cap U_{i,k}) = U_{j,i} \cap U_{j,k}$ und $\varphi_{i,k} = \varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j}$ auf $U_{i,j} \cap U_{i,k}$

erfüllt sind. Zeigen Sie: es existiert ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ mit Morphismen $\gamma_i = (g_i, g^*_i) : (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \to (X, \mathcal{O}_X)$, so dass:

(i) γ_i ist ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema von $(X, \mathcal{O}_X)$,

(ii) $\bigcup\limits_i g_i(X_i) = X$,

(iii) $g_i(U_{i,j}) = g_i(X_i) \cap g_j(X_j)$,

(iv) $\gamma_i = \gamma_j \circ \varphi_{ij}$ auf U_{ij}.

Aufgabe 2: Varietäten als Schemata

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass ein natürlicher, volltreuer Funktor $t : \mathbf{Var}_k \to \mathbf{Sch}(k)$ von der Kategorie der Varietäten in die Kategorie der Schemata über k existiert. Für jede Varietät X ist der topologische Raum X homöomorph zur Menge der abgeschlossenen Punkte von $t(X)$ und die Garbe der regulären Funktionen auf X ist isomorph zur Einschränkung der Strukturgarbe von $t(X)$ auf diese Menge (vgl. auch Hartshorne II.2.6. und die Vorlesung)

Aufgabe 3: Fasern von Morphismen

Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $f^a : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die auf den Spektren induzierte Abbildung. Weiter sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Zeigen Sie:

(i) Das Urbild $f^{a-1}\{\mathfrak{p}\}$ ist homöomorph zu $\operatorname{Spec} B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$.

(ii) Man hat einen natürlichen Isomorphismus von Ringen $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \cong k(p) \otimes_A B$. Daher ist der der schematheoretischen Faser von $\mathfrak{p}$ zugrunde liegende topologische Raum in der Tat das f^a-Urbild von $\{\mathfrak{p}\}$.

Hinweis: Bezeichne S die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $A \backslash \mathfrak{p} \subset A$. Dann ist natürlich auch $f(S) \subset B$ multiplikativ abgeschlossen. Seien weiter $A_\mathfrak{p}$ und $B_\mathfrak{p}$ die Lokalisierungen $S^{-1}A$ bzw. $f(S)^{-1}B$. Identifizieren wir $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$ und $\operatorname{Spec} B_\mathfrak{p}$ mit den entsprechenden Teilräumen von $\operatorname{Spec} A$ bzw. $\operatorname{Spec} B$, so gilt $\operatorname{Spec} B_\mathfrak{p} = f^{a-1}(A_\mathfrak{p})$.