Blatt 7

Aufgabe 1: Eigenschaften von Spec(A)

Sei A ein kommutativer Ring. Zeigen Sie:

(i) Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A gilt: $X = \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in X} \mathfrak{p}$ ist prim.

(ii) $\operatorname{Spec} A$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ das Nilradikal $\operatorname{nil}(A)$ ist prim.

Aufgabe 2: Eine weitere Charakterisierung der Strukturgarbe von $\operatorname{Spec} A$

Sei A ein kommutativer Ring und $X := \operatorname{Spec} A$. Für jedes $f \in A$ sei $U := D_f$ die ausgezeichnete offene Menge $\operatorname{Spec} A \backslash \mathcal{Z}(f)$. Zeigen Sie:

(i) Der Ring $A(U) := A_f$ hängt in der Tat nur von U ab. Genauer: im Falle $D_f = D_g$ existiert ein kanonischer Isomorphismus $A_f \to A_g$.

(ii) Seien U und U' ausgezeichnete Mengen, etwa $U' = D_g$ und $U = D_f$. Wir nehmen an, dass $U' \subset U$. Folgern Sie zunächst die Existenz einer Darstellung der Form $g^n = uf$ mit $n > 0$ und $u \in A$. Schließen Sie hieraus, dass

$$\varphi_{U,U'} : A_f \to A_g,\ \frac{a}{f^m} \mapsto \frac{au^m}{g^{m\cdot n}}$$

eine wohldefinierte Abbildung ist, welche im Sinne von Teilaufgabe i) nur von U und U' abhängt.

(iii) Es ist $\varphi_{U,U}$ die Identität auf $A(U)$ für jede ausgezeichnete Menge U.

(iv) Im Falle von $U'' \subset U' \subset U$ existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A(U)} \arrow[r, "\varphi_{U,U''}"] \arrow[d, "\varphi_{U,U'}"'] & \mathrm{A(U'')} \\ \mathrm{A(U')} \arrow[ur, "\varphi_{U',U''}"'] & \end{tikzcd}$$

(v) Sei $\mathfrak{p}$ eine Primideal von A. Dann ist die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ isomorph zum direkten Limes

$$\varinjlim_{U \ni \mathfrak{p}} A(U),$$

wobei U über alle ausgezeichneten offenen Teilmengen von X läuft, welche den Punkt $\mathfrak{p}$ enthalten.

(vi) Es existiert eine bis auf kanonische Isomorphie eindeutige Struktur eines lokal geringten Raumes auf X, welche durch den inversen Limes

$$\mathcal{O}_X(U) := \varprojlim_{D_f \subset U} A(D_f)$$

für alle offenen Teilmengen U von X gegeben ist. Insbesondere gilt also $\mathcal{O}_X(D_f) = A_f$ für alle $f \in A$. Vergleichen Sie diese Konstruktion der Strukturgarbe auf $\operatorname{Spec} A$ mit jener aus der Vorlesung.