Blatt 6

Aufgabe 1: Eine weitere Charakterisierung von Bewertungsringen

Sei K ein Körper. Seien weiter Unterringe A bzw. B von K gegeben, welche beide lokale Ringe mit maximalen Idealen $\mathfrak{m}_A$ bzw. $\mathfrak{m}_B$ sind. Wir sagen, dass A von B *dominiert* wird, falls $A \subset B$ und $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$. Zeigen Sie nun, dass für einen Integritätsbereich A Folgendes äquivalent ist:

(i) A ist ein Bewertungsring in seinem Quotientenkörper K;

(ii) A ist maximal in K bezüglich der Relation der Dominanz.

Aufgabe 2: Rationale Kurven (wird in der Übung als Präsenzaufgabe gerechnet)

Eine Kurve Y heißt *rational* über einem Grundkörper k, falls Sie birational äquivalent ist zu P^1_k. Bekanntlich ist dies äquivalent dazu, dass der Funktionenkörper $K(X)$ eine eindimensionale rein-transzendente Erweiterung von k ist. Sei nun Y eine eindimensionale rationale nicht-singuläre Kurve, welche nicht isomorph (also nicht biregulär) zu P^1_k ist. Zeigen Sie:

(i) Y ist isomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{A}^1_k$;

(ii) Y ist affin;

(iii) der Funktionenring $\mathcal{A}(Y)$ ist faktoriell.

Aufgabe 3: Eine elliptische Kurve (wird in der Übung als Präsenzaufgabe gerechnet)

Sei Y die Kurve $y^2 = x^3 - x$ in $\mathbb{A}^2_k$. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Charakteristik des Grundkörpers ungleich Zwei ist. Wir wollen nun sehen, dass Y nicht rational ist und somit $K(Y)$ keine rein-transzendente Erweiterung von k ist.

(i) Zeigen Sie, dass Y nicht-singulär ist und folgern Sie, dass $A := A(Y) \cong k[x,y]/(y^2-x^3+x)$ normal ist.

(ii) Sei $k[\bar{x}]$ der Unterring von $K := K(Y)$, welcher von der Restklasse $\bar{x} \in A$ von x und k erzeugt wird. Zeigen Sie, dass $k[\bar{x}]$ ein Polynomring ist, und dass A der ganze Abschluss von $k[\bar{x}]$ in K ist.

(iii) Weisen Sie die Existenz eines Automorphismus $\sigma : A \to A$ über k nach, welcher $\bar{y}$ auf $-\bar{y}$ schickt und $\bar{x}$ fest läßt. Für jedes $a \in A$ definieren wir die *Norm von a* durch $N(a) := a \cdot \sigma(a)$. Zeigen Sie, dass $N(a) \in k[\bar{x}]$, $N(1) = 1$ und $N(a \cdot b) = N(a) \cdot N(b)$ für alle $a, b \in A$.

(iv) Benutzen Sie die Norm um zu zeigen, dass die Einheiten in A genau die Elemente von k^* sind. Prüfen Sie nach, dass $\bar{x}$ und $\bar{y}$ beide irreduzibel in A sind. Weisen Sie auf diese Weise nach, dass A nicht faktoriell ist.

(v) Benutzen Sie die vorherige Aufgabe um zu sehen, dass Y nicht rational ist.

Bemerkung: Y definiert eine sogenannte *elliptische Kurve.*