Algebraische Geometrie I
Wintersemester 2015
Frederik Witt

Universität Stuttgart

Blatt 5

Aufgabe 1: Quotientenmodule der Form $M/\mathfrak{a}M$

Seien $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal und* M *ein* A*-Modul. Dann gilt*

$$(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M,$$

wobei $\mathfrak{a}M$ *der Untermodul* $\{\sum_{\text{endlich}} a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{a}\}$ *von* M *ist.*
Hinweis: Wenden Sie den Tensorfunktor T_M auf die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ an.

Aufgabe 2: Triviales Tensorprodukt

Seien $(A, \mathfrak{m})$ *ein lokaler Ring mit Residuenkörper* $k = A/\mathfrak{m}$*, und* M *und* N *endliche* A*-Module. Beweisen Sie, dass*

(i) $M_k := M \otimes_A k$ *auf natürliche Weise ein* k*-Vektorraum ist;*

(ii) *falls* $M \otimes_A N = 0$*, dann* $M = 0$ *oder* $N = 0$.

Hinweis zu (ii): Wenden Sie Nakayamas Lemma an. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $(M \otimes_A N)_k \cong M_k \otimes_k N_k$ als k-Vektorräume gilt.

Aufgabe 3: Flache A-Algebren

Seien $A \to B$ *ein Ringmorphismus und* M *ein flacher* A*-Modul* $\Rightarrow$ $M_B := B \otimes_A M$ *ist ein flacher* B*-Modul.*

Aufgabe 4: Unterringe Noetherscher Ringe

Sind Unterringe Noetherscher RInge selbst wieder Noethersche Ringe?