Algebraische Geometrie I
Wintersemester 2015
Frederik Witt

Universität Stuttgart

Blatt 3

Aufgabe 1: Morphismen von Spektren

Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringmorphismus.

(i) *Zeigen Sie, dass die assoziierte Abbildung $\varphi^a : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, welche $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ auf $\mathfrak{p}^c = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec} A$ abbildet, wohldefiniert und stetig bzgl. der Zariski-Topologie ist, d.h. Urbilder abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen.*

(ii) *Bestimmen Sie explizit die Abbildung φ^a für die Inklusion $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$.*

Aufgabe 2: Abschluss eines Punkts

Zeigen Sie, dass der Abschluss *von $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, d.h. $\overline{\{\mathfrak{p}\}} := \bigcap_{T \subset \mathfrak{p}} \mathcal{Z}(T)$ durch $\mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ gegeben wird. Folgern Sie, dass*

(i) $\mathfrak{p}$ *ein* geschlossener Punkt *ist (d.h. $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{p}\}$) $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}$ ist maximal*;

(ii) $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

Aufgabe 3: Spalten und Verkleben exakter Sequenzen

(i) *(Spalten) Ist $M_1 \stackrel{\alpha_1}{\to} M_2 \stackrel{\alpha_2}{\to} M_3 \stackrel{\alpha_3}{\to} M_4$ eine exakte Sequenz von A-Moduln, so sind auch*

$$M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \longrightarrow \operatorname{im}\alpha_2 = \ker\alpha_3 \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$0 \longrightarrow \ker\alpha_3 = \operatorname{im}\alpha_2 \longrightarrow M_3 \xrightarrow{\alpha_3} M_4$$

exakt, wobei $\ker\alpha \to M_3$ die Inklusion ist.

(ii) *(Verkleben) Haben wir umgekehrt exakte Sequenzen*

$$M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \xrightarrow{\alpha_2} N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M_3 \xrightarrow{\alpha_3} M_4,$$

wobei $N \to M_3$ die Inklusion ist, dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \xrightarrow{\alpha_2} M_3 \xrightarrow{\alpha_3} M_4.$$

(iii) *Schließen Sie daraus, dass jede exakte Folge*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \qquad M_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} 0$$

in kurze exakte Sequenzen der Form $0 \to \ker\alpha_i \to M_i \stackrel{\alpha_i}{\to} \operatorname{im}\alpha_i \to 0$ gespalten werden kann.

Aufgabe 4: Endliche A-Moduln

Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und $\phi : M \to A^n$ ein surjektiver Morphismus von A-Moduln $\Rightarrow \ker\phi$ ist endlich.

Hinweis: Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von A^n. Wähle $u_i \in M$ so, dass $\phi(u_i) = e_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie $M = \ker\phi \oplus \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ und schließen daraus die Behauptung.