Algebraische Geometrie I
Wintersemester 2015
Frederik Witt

Universität Stuttgart

Blatt 10

Aufgabe 1: 1.75 Surjektive Garbenmorphismen

Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Wir sagen, dass φ **surjektiv** *ist genau dann, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ und $t \in \mathcal{G}(U)$ eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von U und Elemente $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\varphi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$ für alle i existieren. Zeigen Sie, dass*

(i) *φ surjektiv $\Leftrightarrow$ φ_x ist surjektiv für alle $x \in X$.*

(ii) *φ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ φ ist injektiv und surjektiv.*

(iii) *ein Beispiel eines surjektiven Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und eine offene Menge $U \subset X$ mit $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ist nicht surjektiv existiert.*

Aufgabe 2: 1.79 Ringstruktur von Lokalisierungen

Zeigen Sie, dass

(i) *die Äquivalenzrelation und Rechenoperationen in Definition 1.78 (Bruchring) wohldefiniert sind, und damit $S^{-1}A$ insbesondere ein Ring ist;*

(ii) *$S^{-1}A = 0 \Leftrightarrow 0 \in S \Leftrightarrow S$ enthält ein nilpotentes Element;*

(iii) *die natürliche Abbildung $\varphi : A \to S^{-1}A$, welche a auf $a/1$ abbildet, ist ein Ringmorphismus. Ist $\varphi(a) = 0$, so gilt $as = 0$ für ein $s \in S$.*

(iv) *Jedes Element in $S^{-1}A$ ist von der Form $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$.*

Aufgabe 3: 1.94 Spektrum von $A_{\mathfrak{p}}$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$ homöomorph zu $U_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$ ist. Geben Sie eine geometrische Interpretation für $A = k[n]$.

Aufgabe 4: 1.102 Flachheit ist lokale Eigenschaft

Sei M ein A-Modul. Sind äquivalent:

(i) *M ist ein flacher A-Modul;*

(ii) *$M_{\mathfrak{p}}$ ist ein flacher $A_{\mathfrak{p}}$-Modul für all Primideale $\mathfrak{p}$ in A;*

(iii) *$M_{\mathfrak{m}}$ ist ein flacher $A_{\mathfrak{m}}$-module für all maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ in A;*

Insbesondere ist Flachheit eines A-Moduls eine lokale Eigenschaft.