Lösungsvorschlag Aufgabe 49:

Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$. Die *Norm* dieser Körpererweiterung ist dann die Abbildung $N_{L/K} : L \to L$ mit

$$N_{L/K}(x) := \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x)$$

für $x \in L$.

Zeigen Sie, dass $N_{L/K}$ multiplikativ ist und dass gilt $N_{L/K}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Zeigen Sie weiter, dass sogar $N_{L/K}(x) \in K$ für alle $x \in L$ gilt.

Lösung:

Multiplikativität:
Für $x, y \in L$ gilt

$$N_{L/K}(xy) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(xy) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x)\sigma(y) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x) \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(y) = N_{L/K}(x) \cdot N_{L/K}(y).$$

Dies zeigt, dass $N_{L/K}$ multiplikativ ist.

$N_{L/K}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$:
Es ist klar, dass $N_{L/K}(0) = 0$ gilt.
Es gelte umgekehrt für ein $x \in L$, dass $N_{L/K}(x) = 0$. Dann folgt:

$$N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x) = 0$$

und somit gibt es mindestens ein $\sigma_0 \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\sigma_0(x) = 0$. Da σ_0 injektiv ist, bedeutet dies aber $x = 0$. Dies zeigt die Behauptung.

$N_{L/K}(x) \in K$ für alle $x \in L$:
Hierzu zeigt man, dass für $x \in L$ das Element $N_{L/K}(x) \in L$ invariant unter $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist.
Sei also $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ beliebig. Dann gilt:

$$\tau\left(N_{L/K}(x)\right) = \tau\left(\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x)\right) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} (\tau \circ \sigma)(x) \overset{(*)}{=} \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x) = N_{L/K}(x).$$

Damit bleibt $N_{L/K}(x)$ unter $\mathrm{Gal}(L/K)$ fest und somit gilt $N_{L/K}(x) \in K$, da K gerade der Fixkörper der Galoisgruppe ist.
Bei $(*)$ wurde verwendet, dass $\mathrm{Gal}(L/K)$ eine endliche Gruppe ist und dass für jede endliche Gruppe G und jedes $h \in G$ die Abbildung $l_h : G \to G$ mit $g \to hg$ bijektiv ist, d.h. die Elemente von G permutiert. In dem Produkt vor $(*)$ werden also gerade die Elemente von $\mathrm{Gal}(L/K)$ permutiert. Da L kommutativ ist, können deshalb die Faktoren bei $(*)$ wieder umsortiert werden (in dem Produkt kommt es deshalb auf die Reihenfolge der σ nicht an).