Übungsblatt 7

Aufgabe 31:

Beweisen Sie den Dirichletschen Approximationssatz:
Zu jeder reellen Zahl $\alpha > 0$ existieren unendlich viele Paare $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{q}.$$

Hinweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wenigstens zwei der Zahlen $\{0 \cdot \alpha\}, ..., \{n \cdot \alpha\}$ einen Abstand kleiner als $1/n$. Hierbei bezeichnet $\{x\}$ den Nachkommateil einer reellen Zahl x. Konstruieren Sie hieraus ein Paar $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie in der Aufgabenstellung, so dass $1 \leq q \leq n$ gilt.

Aufgabe 32:

Die diophantische Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$, wobei $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat ist, heisst Pellsche Gleichung. Eine nichttriviale Lösung dieser Gleichung ist ein Paar $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $y \neq 0$, welches obige Gleichung erfüllt. In dieser Aufgabe sollen alle nichttrivialen Lösungen dieser Gleichung ermittelt werden. Hierzu wird zunächst die Existenz nichttrivialer Lösungen gezeigt. Zeigen Sie dazu der Reihe nach:

a) Mit der vorigen Aufgabe erhält man eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen und eine streng monoton wachsende Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{y_{i+1}} < |x_i - y_i\sqrt{d}| < \frac{1}{y_i}.$$

b) Es gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass $|x_i^2 - dy_i^2| \leq 1 + 2\sqrt{d}$. Es existiert deshalb $r \in \mathbb{N}$, so dass es unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $r = |x_i^2 - dy_i^2|$. Dabei nehmen wir o.B.d.A. an, dass es unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $r = x_i^2 - dy_i^2$ (der Fall $-r$ geht analog).

c) Es gibt $s, t \in \mathbb{N}$ mit $s < t$, so dass $x_s^2 - dy_s^2 = x_t^2 - dy_t^2$ und $r \mid (x_s - x_t)$ sowie $r \mid (y_s - y_t)$ gilt.

d) Es gilt $(x_s + y_s\sqrt{d})(x_t - y_t\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$ mit $a = x_sx_t - dy_sy_t$ und $b = x_sy_t - x_ty_s$. Weiterhin sind a und b durch r teilbar, d.h. es gibt $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $a = ru$ und $b = rv$.

e) Das Paar (u, v) ergibt nach entsprechender Wahl des Vorzeichens eine nichttriviale Lösung der Pellschen Gleichung.

f) Sei $(\xi, \eta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine nichttriviale Lösung der Pellschen Gleichung, so dass $\xi + \eta\sqrt{d}$ den kleinsten Wert unter allen nichttrivialen Lösungen besitzt (mit ξ wächst auch η). Dann ist jede nichttriviale Lösung $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ derart, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x + y\sqrt{d} = (\xi + \eta\sqrt{d})^n$.

Hinweis: Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es $m \in \mathbb{N}$ mit $(\xi + \eta\sqrt{d})^m < x + y\sqrt{d} < (\xi + \eta\sqrt{d})^{m+1}$. Führen Sie dies zum Widerspruch, indem Sie die Normabbildung aus Aufgabe 15 benutzen.

Aufgabe 33:

Sei $p > 3$ eine Primzahl. Stellen Sie einen „3.Ergänzungssatz “auf, indem Sie angeben, welchen Wert $\left(\frac{3}{p}\right)$ in Abhängigkeit der Restklasse von p modulo 12 annimmt.

Aufgabe 34 und 35 siehe Rückseite.

Aufgabe 34:

Sind $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Es gelte $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ und $1 \neq b$ sei ungerade. Ferner sei $b = p_1^{a_1} \cdot \ldots p_r^{a_r}$ die Primzahlzerlegung von b. Dann definiert man das **Jacobisymbol** durch

$$\left(\frac{a}{b}\right) := \left(\frac{a}{p_1}\right)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_r}\right)^{a_r},$$

wobei auf der rechten Seite Legendre-Symbole stehen. Ferner sei $\left(\frac{a}{1}\right) := 1$. Zeigen Sie:

(i) $\left(\frac{-1}{b}\right) = (-1)^{(b-1)/2}$

(ii) $\left(\frac{2}{b}\right) = (-1)^{(b^2-1)/8}$

(iii) $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{(a-1)/2 \cdot (b-1)/2}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Wann gibt das Jacobisymbol an, dass a ein quadratischer Rest modulo b ist ?

Aufgabe 35:

Berechnen Sie möglichst einfach:

$$\text{a)} \left(\frac{-9}{17}\right) \quad \text{b)} \left(\frac{997}{701}\right) \quad \text{c)} \left(\frac{443}{383}\right)$$

Hinweis: Teilaufgaben a) und b) lassen sich allein mit Eigenschaften des Legendresymbols behandeln, für c) ist Aufgabe 34 nützlich.