Übungsblatt 6

Aufgabe 26:

Ein pythagoreisches Zahlentripel sind drei Zahlen $x, y, z \in \mathbb{N}$, welche die diophantische Gleichung $x^2+y^2 = z^2$ erfüllen. In dieser Aufgabe sollen alle solchen Tripel klassifiziert werden. Durch Division durch einen gemeinsamen Teiler sieht man leicht, dass man sich auf primitive pythagoreische Tripel beschränken kann, d.h. es gilt $\mathrm{ggT}(x, y, z) = 1$. Zeigen Sie der Reihe nach:

a) Ist (x, y, z) ein primitives pythagoreisches Tripel, so ist genau eine der drei Zahlen gerade, welche o.B.d.A. y sei. Also gilt $x = 2u + 1, y = 2v$ und $z = 2w + 1$ für gewisse $u, v, w \in \mathbb{N}$.
b) Mit $r := w + u + 1$ und $s := w - u$ gilt $y^2 = 4rs$ und $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$.
c) Es gibt Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so dass $r = a^2$ und $s = b^2$ gilt.
d) Es gilt $x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$ und $a - b \equiv 1 \bmod 2$.
e) Sind umgekehrt $c, d \in \mathbb{N}$ nun beliebige Zahlen, welche $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ und $c - d \equiv 1 \bmod 2$ erfüllen, so liefert $x := c^2 - d^2, y := 2cd, z := c^2 + d^2$ ein primitives pythagoreisches Tripel (x, y, z).

Aufgabe 27:

Die diophantische Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ mit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ ist ein Spezialfall des Großen Fermatschen Satzes. Zeigen Sie mit Hilfe der vorangehenden Aufgabe, dass allgemeiner die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$ keine nichttrivialen Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ besitzt.

Hinweis: Wählen Sie o.B.d.A. eine Lösung x_0, y_0, z_0, so dass $|z_0|$ minimal ist unter allen nichttrivialen Lösungen. Für diese gilt dann $\mathrm{ggT}(x_0, y_0, z_0) = 1$. Konstruieren Sie dann durch zweimalige Anwendung der vorangehenden Aufgabe eine nichttriviale Lösung mit kleinerem $|z|$.

Aufgabe 28:

Finden Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, die folgende diophantische Gleichungen erfüllen:

a) $144x + 96y = 72$
b) $5x^2 + y^2 = 8z^2 + 11$
c) $2x^3 + 5x^2y + 11xy^2 = 12y^3$
d) $x^3 + y^3 = z^3$ mit $xyz \not\equiv 0 \bmod 3$.

Aufgabe 29:

Seien $p_1 < \ldots < p_n$ direkt aufeinander folgende natürliche Primzahlen mit $n \geq 5$ (zwischen p_i und p_{i+1} liegt also keine Primzahl). Dann gilt

$$p_n^2 < p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}.$$

Gilt die Aussage auch für $n = 4$?
Hinweis: Bertrands Postulat könnte nützlich sein.

Aufgabe 30:

In dieser Aufgabe sollen einige Konsequenzen des Primzahlsatzes betrachtet werden.
Für $x \in \mathbb{N}$ sei im Folgenden $\pi(x) := |\{\, p \in P \mid p \leq x\}|$ die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x und $n_2(x) := \left|\{\, n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq x\}\right|$ die Anzahl der Quadratzahlen kleiner gleich x.

a) Zeigen Sie unter Verwendung der Abschätzungen von Tschebyscheff, dass die Primzahlen dichter in $\mathbb{N}$ liegen als die Quadratzahlen, indem Sie zeigen, dass gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n_2(x)}{\pi(x)} = 0.$$

b) Zeigen Sie mit dem Primzahlsatz folgende Verschärfung des Bertrandschen Postulats:
Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x_0 > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{N}$ mit $x \geq x_0$ gilt, dass zwischen x und $(1 + \varepsilon)x$ mindestens eine Primzahl liegt.

Hinweis zu b): Schätzen Sie mit Hilfe des Primzahlsatzes $\pi\left((1 + \varepsilon)x\right) - \pi(x)$ für hinreichend große x nach unten ab, so dass diese Zahl für diese x stets positiv ist.