Übungsblatt 4

Aufgabe 16:

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot b = c \cdot d$.
a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a^k + b^k + c^k + d^k$$

keine Primzahl ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\frac{a}{c}$ in gekürzter Form als $\frac{x}{y}$.
b) Bestimmen Sie alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$$

ebenfalls Primzahlen sind.

Aufgabe 17:

Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{N}$, mit

$$p \equiv 3 \ mod\ 4.$$

Aufgabe 18:

$m \in \mathbb{N}$ besitze die Dezimaldarstellung

$$m = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

a) Zeigen Sie: m ist genau dann durch 11 teilbar, wenn 11 die Summe $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$ teilt.
b) Sei $n = 99$ und $a_i = 1$ für $1 \leq i \leq 99$. Für welche a_0 ist dann m durch 7 teilbar ?

Aufgabe 19:

Sei P die Menge aller Primzahlen von $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{p\in P}\frac{1}{p}$ divergiert.

Gehen Sie folgendermaßen vor: Falls die Summe konvergiert, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}.$$

Hierbei sei P in aufsteigender Reihenfolge $p_1, p_2, p_3, \ldots$ angeordnet. Seien $P_m := \{p_1, \ldots, p_m\}$ die ersten m Primzahlen und P_r die restlichen Primzahlen. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne n_r die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leq n$, die durch mindestens eine der restlichen Primzahlen teilbar ist und n_m jene, die nur durch Primzahlen aus P_m teilbar sind.
Zeigen Sie:

a) $n_r < \frac{n}{2}$.
b) $n_m \leq 2^m \cdot \sqrt{n}$.

Verwenden Sie dann a) und b) , um die Aussage zu beweisen.

Aufgabe 20 siehe Rückseite

Aufgabe 20:

(zur Wiederholung von Algebra) Sei K ein Körper und die formale Ableitung $d : K[x] \longrightarrow K[x]$ sei definiert durch

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \mapsto \quad d(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i \cdot x^{i-1}$$

wenn $grad f \geq 1$ und $d(f) = 0$, wenn f eine Konstante ist.

Zeigen Sie:

(i) d ist eine K - lineare Abbildung.

(ii) Es gilt die Produktregel, d.h.

$$d(f \cdot g) \;=\; d(f) \cdot g + d(g) \cdot f.$$

(iii) Besitzt f mehrfache Nullstellen, dann haben f und $d(f)$ eine gemeinsame Nullstelle.