Übungsblatt 2

Aufgabe 6:

Archimedes gelang die Dreiteilung eines beliebigen gegebenen Winkels φ mit Zirkel und Lineal durch folgenden Trick: Zunächst schlägt man um A einen Kreis mit beliebigem Radius $r > 0$ und erhält daraus den Punkt B. Mit einem Stift markiert man dann zwei Punkte auf dem Lineal mit dem Abstand r. Dann legt man das Lineal so im Punkt B an, dass eine der beiden Markierungen auf der horizontalen x-Achse liegt und die andere gerade auf dem Kreis liegt und erhält daraus die Punkte C und D mit Abstand r. Zeigen Sie elementargeometrisch, dass $\alpha = \varphi/3$ gilt. Warum ist dies kein Widerspruch zur Unmöglichkeit der Dreiteilung eines beliebigen Winkels φ nur mit Zirkel und Lineal?

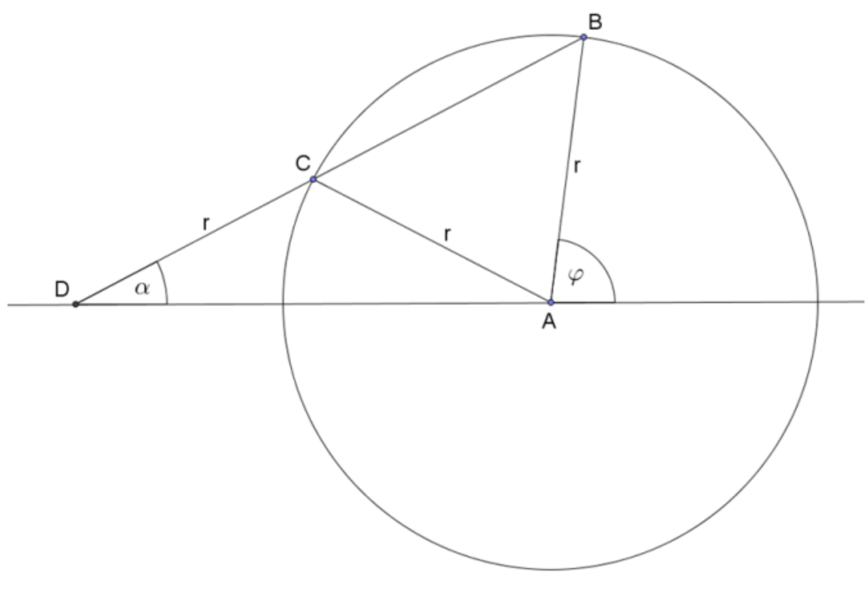

Abbildung 1: Konstruktion des Archimedes

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene. Welche der folgenden Zahlen lassen sich hieraus nur mit Zirkel und Lineal konstruieren?

a) $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{i + \sqrt{2}\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{i\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1 + \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}}$ c) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ d) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$

Hinweis zu c) und d): Untersuchen Sie, ob die Zahlen aus $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ unter der dritten Wurzel von der Form z^3 mit $z = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sind, wobei $a, b \in \mathbb{Q}$ beliebig wählbar sind.

Aufgabe 9:

Um 420 v. Chr. gelang es Hippias von Elis eine Kurve zu konstruieren, die eine proportionale Beziehung zwischen y-Achsenabschnitt und Winkel erfüllt, die sogenannte *Quadratrix* (siehe Abbildung 2). Eine Parametrisierung hiervon ist gegeben durch $\gamma : (0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(c) = \begin{pmatrix} \dfrac{c}{\tan\left(\dfrac{\pi c}{2}\right)} \\ c \end{pmatrix}.$$

Gegeben sei die Menge $M = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Die *Quadratrix* kann nun genutzt werden, um mit Zirkel und Lineal Konstruktionsprobleme wie die Winkelteilung oder die Quadratur des Kreises zu lösen, die ohne diese zusätzliche Kurve nicht lösbar wären.

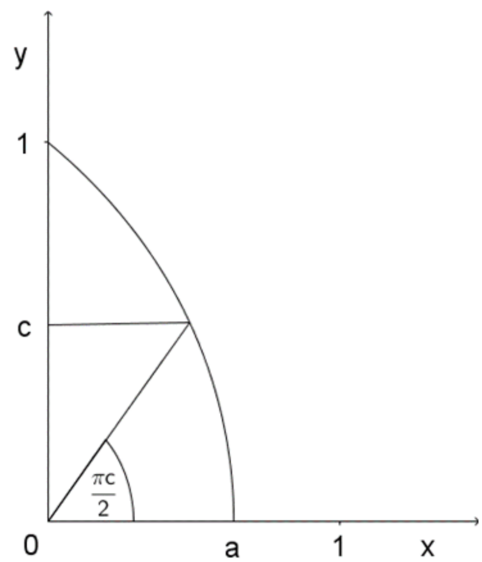

Abbildung 2: Quadratrix

a) Gegeben sei ein beliebiger Winkel $\varphi = \pi c/2$ mit $0 \leq c \leq 1$. Zeigen Sie, dass man nur mit Zirkel, Lineal und der Quadratrix den Winkel φ/n für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruieren kann.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Quadratrix mit der x-Achse, indem Sie $\lim\limits_{c \to 0+} \gamma(c)$ und somit a berechnen (dieser Grenzwert wird als Element von M betrachtet).
Folgern Sie hieraus, dass die Quadratur jedes Kreises um 0 mit Radius $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit Zirkel, Lineal und der Quadratrix durchführbar ist.

Aufgabe 10:

(Wiederholung aus der Algebra) Welches der folgenden Polynome ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ bzw. $\mathbb{Q}[X]$? Hierbei sei immer p eine beliebige Primzahl.

a) $p_1(X) = X^6 - 2X^3 - 3$

b) $p_2(X) = 3X^p - 15$

c) $p_3(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 = \sum\limits_{i=0}^{p-1} X^i$

d) $p_4(X) = X^3 - 15X^2 + 5X + 4$

Hinweis zu c): Nutzen Sie die geometrische Summenformel und führen Sie dann die Substitution $X \to X + 1$ durch, vgl. auch Vorlesung.