Übungsblatt 11

Aufgabe 50 (Regelmäßiges Siebzehneck):

Carl Friedrich Gauß erregte großes Aufsehen, als er 1796 als Erster zeigen konnte, dass das regelmäßige Siebzehneck nur mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Hierzu hat er eine explizite Formel für $\cos(2\pi/17)$ hergeleitet, welche beweist, dass diese Zahl durch eine endliche Anzahl von Körpererweiterungen vom Grad 2 aus $\mathbb{Q}$ erhalten werden kann. Diese Formel soll in dieser Aufgabe unter Verwendung der Galoistheorie (diese wurde erst nach 1796 entwickelt) bewiesen werden. Sei hierzu $\xi := e^{2\pi i/17}$ eine primitive 17-te Einheitswurzel. Wir definieren dann folgende Mengen:

$$M_1 := \{\xi, \xi^2, \xi^4, \xi^8, \xi^9, \xi^{13}, \xi^{15}, \xi^{16}\}$$
$$M_2 := \{\xi^3, \xi^5, \xi^6, \xi^7, \xi^{10}, \xi^{11}, \xi^{12}, \xi^{14}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass gilt $M_1 = \{\xi^{2^i} | i \in \mathbb{N}_0\}$ sowie $M_2 = \{\xi^{3\cdot 2^i} | i \in \mathbb{N}_0\}$.

Wir definieren dann die Gaußschen Summen

$$p_1 := \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \xi^9 + \xi^{13} + \xi^{15} + \xi^{16} = \sum_{m \in M_1} m$$
$$p_2 := \xi^3 + \xi^5 + \xi^6 + \xi^7 + \xi^{10} + \xi^{11} + \xi^{12} + \xi^{14} = \sum_{m \in M_2} m.$$

b) Zeigen Sie, dass für jedes fest gewählte $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ entweder $\sigma(M_1) = M_1$ oder $\sigma(M_1) = M_2$ gilt. Folgern Sie hieraus $\sigma(p_1p_2) = p_1p_2$, d.h. $p_1p_2 \in \mathbb{Q}$.

Durch schlichtes Ausmultiplizieren des Produkts p_1p_2 ist klar, dass man dieses in der Form $p_1p_2 = \sum_{i=1}^{16} \alpha_i \xi^i$ für gewisse $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{i=1}^{16} \alpha_i = 64$ schreiben kann. Der konstante Term $\xi^0 = 1$ taucht dabei nicht auf, da das (multiplikativ) Inverse jedes Elementes von M_1 in M_1, aber nicht in M_2 liegt.

c) Zeigen Sie, dass gilt $\alpha_i = \alpha \in \mathbb{N}$ für $i = 1, ..., 16$ mit einem festen $\alpha \in \mathbb{N}$, d.h. alle Koeffizienten sind gleich. Folgern Sie hieraus $p_1p_2 = -4$.
Hinweis: Falls etwa $\alpha_s \neq \alpha_t$ mit $s \neq t$ wäre, betrachten Sie $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\xi^s) = \xi^t$ und verwenden Sie b). Warum existiert ein solches σ?

d) Zeigen Sie, dass gilt $p_1 + p_2 = -1$. Bestimmen Sie aus dieser Gleichung und c) eine quadratische Gleichung für p_1 und p_2 und bestimmen Sie daraus p_1 und p_2.
Zwischenergebnis: $p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$ und $p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Wir teilen diese Summen nun weiter auf. Sei hierzu

$$p_3 := \xi + \xi^4 + \xi^{13} + \xi^{16} \qquad p_4 := \xi^2 + \xi^8 + \xi^9 + \xi^{15}$$
$$p_5 := \xi^3 + \xi^5 + \xi^{12} + \xi^{14} \qquad p_6 := \xi^6 + \xi^7 + \xi^{10} + \xi^{11}.$$

e) Rechnen Sie explizit nach, dass gilt $p_3 + p_4 = p_1$, $p_3p_4 = -1$, $p_5 + p_6 = p_2$ und $p_5p_6 = -1$. Bestimmen Sie damit quadratische Gleichungen für p_3, p_4, p_5 und p_6 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(p_1, p_2)$ und lösen Sie diese nach p_3, p_4, p_5 und p_6 auf.

Zwischenergebnis:

$$
\begin{aligned}
p_3 &= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} + \sqrt{\frac{17}{8} - \frac{\sqrt{17}}{8}} \\
p_4 &= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} - \sqrt{\frac{17}{8} - \frac{\sqrt{17}}{8}} \\
p_5 &= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} + \sqrt{\frac{17}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8}} \\
p_6 &= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} - \sqrt{\frac{17}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8}}.
\end{aligned}
$$

f) Wir setzen nun $p_7 := \xi + \xi^{16}$ und $p_8 := \xi^4 + \xi^{13}$. Rechnen Sie nach, dass gilt $p_7 + p_8 = p_3$ und $p_7 p_8 = p_5$. Bestimmen Sie damit eine quadratische Gleichung für p_7 und p_8 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(p_3, p_5)$ und bestimmen Sie damit p_7 und p_8. Setzen Sie in dem Ausdruck für p_7 die entsprechenden Ausdrücke für p_3 und p_5 ein und zeigen Sie damit abschließend die Formel von Gauß für $\cos(2\pi/17) = \operatorname{Re}(\xi) = \frac{p_7}{2}$:

$$
\cos(2\pi/17) = \frac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17-\sqrt{17})} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17-\sqrt{17})} - 2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\right).
$$

Warum folgt hieraus, dass das regelmäßige Siebzehneck mit Zirkel und Lineal aus $\mathbb{Q}$ konstruierbar ist?