Übungsblatt 10

Aufgabe 46:

Sei $(E,G)_P$ die Poincaresche Halbebene. Zeigen Sie:
Für $g \in G$ werde wie in der Vorlesung eine Abbildung $\sigma_g : E \longrightarrow E$ durch

$$\sigma_g(z) := -\overline{z} + 2a,$$

falls g die Gleichung $Rez = a$ hat, bzw.

$$\sigma_g(z) := \frac{r^2}{\overline{z} - a} + a \ ,$$

falls g die Gleichung $|z - a| = r$ besitzt, definiert.

Zeigen Sie:

a) σ_g lässt die Gerade g punktweise fest.
b) σ_g vertauscht die beiden zu g gehörigen Halbebenen (wie sehen diese aus ?)
c) $\sigma_g^2 = id.$

Die Abbildung σ_g nennt man Spiegelung von $(E,G)_P$ an $g \in G$.

Aufgabe 47:

Sei $(E,G)_P$ die Poincaresche Halbebene. Unter einer gebrochen linearen Transformation versteht man eine Abbildung $E \longrightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0,$$

bzw. durch

$$z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \text{ mit } a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc < 0,$$

gegeben ist.

(i) Zeigen Sie, dass gebrochen lineare Transformationen die Poincaresche Halbebene E bijektiv auf sich selbst abbilden.
(ii) Zeigen Sie, dass diese Transformationen eine Gruppe bilden.
(iii) Zeigen Sie, dass diese Gruppe isomorph zur Gruppe der regulären 2×2 - Matrizen über $\mathbb{R}$ mit Determinante ± 1 ist.
(iv) Schreiben Sie die Transformation $z \mapsto a\overline{z} + b$ mit $a < 0$ als ein Produkt von Spiegelungen σ_g, vgl. Aufgabe 46.

zur Wiederholung von Galoistheorie:

Aufgabe 48:

a) Sei p eine Primzahl. Berechnen Sie die Galoisgruppe G des Polynoms

$$f(x) = x^3 - p \in \mathbb{Q}[x]$$

(dies ist per definitionem die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L der Wurzeln von f über $\mathbb{Q}$).

Verifizieren Sie zunächst, dass jedes Element der Galoisgruppe (also jeder Körperautomorphismus von L) die Wurzeln dieses Polynoms permutiert und die Galoisgruppe auf den Wurzeln transitiv operiert.

Bestimmen Sie gemäß des Hauptsatzes der Galoistheorie alle Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$ und die dazu korrespondierenden Untergruppen von G.

b) Berechnen Sie die Galoisgruppe von

$$f(x) = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist. Von welcher Gruppe ist die Galoisgruppe damit automatisch eine Untergruppe? Zeigen Sie weiter, dass die Galoisgruppe Elemente der Ordnung 5 und der Ordnung 2 enthält.

Aufgabe 49:

Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$. Die *Norm* dieser Körpererweiterung ist dann die Abbildung $N_{L/K} : L \to L$ mit

$$N_{L/K}(x) := \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x)$$

für $x \in L$.

Zeigen Sie, dass $N_{L/K}$ multiplikativ ist und dass gilt $N_{L/K}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Zeigen Sie weiter, dass sogar $N_{L/K}(x) \in K$ für alle $x \in L$ gilt.