Institut für Geometrie und Topologie
W. Kimmerle Übungsblatt 2

Übungen zu Gruppen- und Darstellungsringen

SS12

Aufgabe 6: Berechnen Sie alle Idempotente (als Linearkombinationen der Gruppenbasis) von
a) $\mathbb{Q}C_2 \times C_2$ bzw.
b) $\mathbb{C}C_3$ und $\mathbb{Q}C_3$.

Aufgabe 7: Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper.
Zeigen Sie: Ein voller Matrixring $K^{n\times n}$ über K besitzt bis auf Isomorphie genau einen einfachen Linksmodul. Dieser ist isomorph zum Raum der Spaltenvektoren K^n ist, auf dem der Matrixring durch Linksmultiplikation operiert.

Aufgabe 8: Zeigen Sie:
a) $\mathbb{Q}S_3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{2\times 2}$.
b) $\mathbb{Q}D_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{2\times 2}$.
c) $\mathbb{Q}Q_8 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times H$,
wobei H den Quaternionenschiefkörper über $\mathbb{Q}$ bezeichnet.
Hinweis: Konstruieren Sie geeignete injektive Homomorphismen der Gruppen nach $\mathbb{Q}_{2\times 2}$ bzw. nach H.

Aufgabe 9: Sei G eine endliche p-Gruppe und K ein Körper der Charakteristik p.
Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie nur einen einfachen KG - Modul gibt.
Hinweis: Zeigen Sie dies zunächst wenn $K = F_P$ der Körper mit p - Elementen ist.

Aufgabe 10. Sei G eine endliche Gruppe. Ist e ein zentralprimitives Idempotent von KG und S ein einfacher KG - Modul, dann gilt $eS = 0$ oder $eS = S$. Folgern Sie hieraus, dass die Anzahl der Blöcke von KG kleiner gleich der Anzahl einfacher KG - Moduln ist.
Sei G eine endliche p - Gruppe und K ein Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie, dass KG nur einen Block besitzt.