

## Übungen zu Gruppen - und Darstellungsringen

—WS16/17—

- Aufgabe 1:** a) Bestimmen Sie von  $\mathbb{Z}C_2$  alle Einheiten und alle Idempotente.  
b) Hat in  $\mathbb{Z}C_5$  die Einheit  $u = -1 + t + t^{-1}$  endliche Ordnung ?

**Aufgabe 2:**

Sei  $G$  eine Gruppe und  $R$  ein Ring. Sei  $\tau : G \rightarrow U(R)$  ein Gruppenhomomorphismus.

Zeigen Sie, dass es genau einen Ringhomomorphismus  $\hat{\tau} : \mathbb{Z}G \rightarrow R$  gibt mit  $\hat{\tau}|_G = \tau$ .

**Aufgabe 3:** Berechnen Sie die Wedderburnzerlegung von  $\mathbb{C}S_4$ ,  $\mathbb{C}D_4$  und  $\mathbb{C}Q_8$ . Hinweis: Zeigen Sie zuerst: Ist  $Q$  ein Bild von  $G$ , dann ist  $\mathbb{C}Q$  ein Bild von  $\mathbb{C}G$ .

**Aufgabe 4:**

Berechnen Sie das Zentrum von  $\mathbb{Z}S_3$  und alle zentralen Idempotente. Gibt es nicht-triviale zentrale Einheiten ?

**Aufgabe 5:**

$\mathbb{Z}G$  und  $\mathbb{Z}H$  seien isomorphe Gruppenringe. Zeigen Sie, dass es dann einen Isomorphismus  $\tau : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$  gibt, der die Augmentationsideale ineinander überführt.

**Bezeichnungen:**  $C_p$  bezeichnet die zyklische Gruppe der Ordnung  $p$ ,  $S_n$  die symmetrische Gruppe vom Grad  $n$  und  $F_p$  den Körper mit  $p$  Elementen.  $D_4$  ist die Diedergruppe der Ordnung 8,  $Q_8$  die Quaternionengruppe der Ordnung 8.