

Übungsblatt 8

Aufgabe 36:

- Sei p eine ungerade Primzahl und G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^3 . Berechnen Sie die Wedderburnzerlegung von $\mathbb{C}G$.
- Ist die Gruppe der unipotenten (d.h. alle Hauptdiagonaleinträge sind 1) oberen Dreiecksmatrizen über dem Körper mit p Elementen isomorph zum nichttrivialen semidirekten Produkt der Form $C_{p^2} \rtimes C_p$?

Aufgabe 37:

- Wieviele Konjugiertenklassen kann eine Gruppe der Ordnung 32 haben?
- Sei G eine Gruppe der Ordnung $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Zeigen Sie, dass G mindestens 11 Konjugiertenklassen hat.

Aufgabe 38:

Sei M eine G -Menge, G eine endliche Gruppe und K ein Teilkörper von \mathbb{C} . Der K -Vektorraum mit Basis M wird dann in natürlicher Weise zu einem KG -Modul. Bezeichnet μ_g die Linksmultiplikation auf M , dann ist μ_g eine K -lineare Abbildung von M . Bezeichnet M_g die Matrixdarstellung von μ_g bezüglich der Basis M , dann ist

$$\varphi : G \longrightarrow \text{GL}(|M|, K) \text{ gegeben durch } g \mapsto M_g$$

eine K -Darstellung von G bestehend aus Permutationsmatrizen. Der zugehörige K -Charakter werde mit χ_M bezeichnet.

- Zeigen Sie: $\chi_M(g) := |\{m \in M; g \cdot m = m\}|$
- Bezeichne χ_1 den trivialen irreduziblen Charakter, dann ist die Anzahl der Bahnen von G auf M gerade durch

$$\langle \chi_M, \chi_1 \rangle$$

gegeben.

Aufgabe 39:

Sei M eine endliche G -Menge. Durch $g \cdot (m_1, m_2) := (g \cdot m_1, g \cdot m_2)$ für $g \in G, m_1, m_2 \in M$ wird $M \times M$ zu einer G -Menge. χ_M bzw. $\chi_{M \times M}$ seien wie in der vorigen Aufgabe definiert. G operiere auf M 2-fach transitiv.

- Berechnen Sie die Anzahl der Bahnen von G auf $M \times M$.
- Berechnen Sie $\chi_{M \times M}$ in Abhängigkeit von χ_M .
- Zeigen Sie: $\sum_{g \in G} \chi_M(g)^2 = 2 \cdot |G|$.
- Zeigen Sie:

$$\chi_M = \chi_1 + \chi_2,$$

wobei χ_1 der triviale irreduzible Charakter und χ_2 irreduzibel ist.

Aufgabe 40:

Zeigen Sie: Ist G eine p -Gruppe mit zyklischem Zentrum, dann hat G einen treuen irreduziblen Charakter.