Gewöhnliche Darstellungen endlicher Gruppen **Prof. Dr. W. Kimmerle**
SS 2015

Übungsblatt 7

Aufgabe 31:

Gegeben sei die folgende Charaktertafel einer endlichen Gruppe G.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	ξ	ξ^2	1	ξ^2	ξ	1
χ_3	1	ξ^2	ξ	1	ξ	ξ^2	1
χ_4	2	1	1	-2	-1	-1	0
χ_5	2	ξ^2	ξ	-2	$-\xi$	$-\xi^2$	0
χ_6	2	ξ	ξ^2	-2	$-\xi^2$	$-\xi$	0
χ_7	3	0	0	3	0	0	-1

,

wobei $\xi = e^{2\pi i/3}$ ist.

Bestimmen Sie:

$|G/[G,G]|$. Welche Konjugiertenklassen C_j liegen in $[G,G]$??

$|Z(G)|$. Welche Konjugiertenklassen C_j liegen im Zentrum $Z(G)$?

Wieviele 2 - Sylowgruppen und wieviele 3 - Sylowgruppen besitzt G ?

Aufgabe 32:

Sei G eine endliche Gruppe, $g \in G$ und $N \lhd G$. Zeigen Sie mit Hilfe der 2. Orthogonalitätsrelationen:

$$|C_{G/N}(gN)| \ \leq \ |C_G(g)|.$$

Aufgabe 33:

a) Zeigen Sie: Ist N ein Normalteiler der endlichen Gruppe G. Dann gibt es irreduzible Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_m$, so dass

$$N = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\chi_i$$

b) Berechnen Sie alle Normalteiler einer Gruppe G, deren Charaktertafel mit jener aus Aufgabe 31 übereinstimmt.

c) Zeigen Sie: Die gewöhnliche Charaktertafel einer endlichen Gruppe G bestimmt ihren Normalteilerverband. Die Ordnung der Normalteiler ist aus der Charaktertafel ablesbar.

Aufgabe 34:

Sei $\chi \in IrrG$ und $Z(\chi) := \{g \in G; |\chi(g)| = \chi(1)\}$. Zeigen Sie:
$Z(\chi)/\mathrm{Ker}\chi$ stimmt mit dem Zentrum $Z(G/Ker\chi)$ überein.

Folgern Sie hieraus, dass das Zentrum $Z(G)$ zyklisch ist, falls G einen treuen irreduziblen Charakter besitzt.

Aufgabe 35:

Zeigen Sie: $\mathbb{Z}$ ist der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}$. Ist $q \in \mathbb{Q}$ ganz in einem Körper der Charakteristik 0, dann ist $q \in \mathbb{Z}$. Ist σ ein Körperautomorphismus eines Körpers K mit char$K = 0$ und x ganz, dann ist auch $\sigma(x)$ ganz.