Gewöhnliche Darstellungen endlicher Gruppen **Prof. Dr. W. Kimmerle**
SS 2015

Übungsblatt 6

Aufgabe 26:

Zeigen Sie: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Zerfällungskörper von G und $\mathrm{Irr}_K G = \{\chi_1, \ldots, \chi_h\}$. Bezeichne $C_i,\ 1 \leq i \leq h$ die Konjugiertenklassen von G und sei g_i ein Repräsentant von C_i. Definiere $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{h\times h}$ durch

$$b_{ij} \;=\; \chi_j(g_i^{-1}) \cdot \frac{|C_i|}{|G|} \;=\; \frac{1}{|C_G(g_i)|} \cdot \chi_j(g_i^{-1}).$$

Dann gilt

$$\mathrm{ChT}(G) \cdot B = E^{h\times h}.$$

Hierbei wird $\mathrm{ChT}(G)$ als quadratische Matrix aufgefasst.

Aufgabe 27:

(Sogenannte 2. Orthogonalitätsrelationen) Zeigen Sie: Sei G eine endliche Gruppe mit $\mathrm{Irr}G = \{\chi_1, \ldots, \chi_h\}$. Bezeichne $C_i,\ 1 \leq i \leq h$ die Konjugiertenklassen von G und sei $g_i \in C_i$ mit Zentralisator $C_G(g_i)$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{h} \chi_j(g_i^-1)\chi_j(g_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ |C_G(g_i)| & \text{für } i = k \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 26.

Aufgabe 28:

Berechnen Sie die Charaktertafel der S_3 und der A_4.

Aufgabe 29:

Sei G eine endliche Gruppe, $g \in G$ und $\mathrm{Irr}G = \{\chi_1, \ldots, \chi_h\}$. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Geben Sie entweder ein Gegenbeispiel oder einen Beweis an.

(i) Sei $\chi_i(g) \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq h$. Dann sind g und g^{-1} zueinander konjugiert.

(ii) $o(g) = 2 \Longrightarrow \chi_i(G) \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq h$.

(iii) $N \lhd G$ dann existiert $\chi \in \mathrm{Irr}G$ mit $N = \mathrm{Ker}\chi$.

(iv) Aus $\mathrm{ChT}(G)$ kann man stets die Ordnung eines Repräsentanten einer Konjugiertenklasse von G bestimmen.

Aufgabe 30:

Für welche Werte von a bzw. b ist die folgende Tafel die gewöhnliche Charaktertafel einer Gruppe ? Gehen Sie folgendermaßen vor:

Überprüfen Sie, ob die Tafel den Orthogonalitätsrelationen genügt.

Welche Wedderburnzerlegung hätte $\mathbb{C}G$?

Was folgt daraus für mögliche Bilder von G? Welche Ordnung und welche Normalteiler hätte G?.

Berechnen Sie die zentral - primitiven Idempotente von $\mathbb{C}G$ (unter der Voraussetzung, dass es sich um eine Charaktertafel einer Gruppe G handelt)

Welche Längen hätten die Konjugiertenklassen von G?

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	a
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	b