Übungsblatt 5

Aufgabe 21:

Welche der folgenden Algebren sind Gruppenalgebren ?

(a)
$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

(b)
$$\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \times \mathbb{R}$$

c)
$$\begin{pmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{pmatrix} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

d)
$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

e)
$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

Aufgabe 22:

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Geben Sie entweder ein Gegenbeispiel oder einen Beweis an.
Sei E eine Gruppe, K ein Körper sowie $\Phi : E \longrightarrow G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Ferner sei $N = Ker\Phi$.

(i) KG ist ein Bild von KE.

(ii) KE ist genau dann halbeinfach, wenn KN und KG halbeinfach sind.

(iii) Sei KE halbeinfach. Jede Wedderburnkomponenten von KN ist auch eine Wedderburnkomponente von KE.

(iv) Jede Wedderburnkomponente von KG ist eine Wedderburnkomponente von KE.

(v) Stimmt in der Wedderburnzerlegung von KE jeder Schiefkörper mit K überein, so gilt dies auch für KN.

Aufgabe 23:

Bestimmen Sie eine irreduzible gewöhnliche Darstellung der Quaternionengruppe der Ordnung 8 vom Grad 2.

Aufgabe 24:

Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie: Die Anzahl der Wedderburnkomponenten der Größe 1 von $\mathbb{C}G$ stimmt mit der Ordnung von $G/[G, G]$ überein.

Aufgabe 25:

Welche Gestalt kann die komplexe Gruppenalgebra einer nicht abelschen Gruppe der Ordnung 8 bzw. der Ordnung 10 haben ?
Hinweis: Aufgabe 4