Übungsblatt 3

Aufgabe 11:

Sei K ein Körper. Betrachten Sie den Ring

$$R := \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

als Modul über sich selbst (durch Linksmultiplikation). Erfüllt dieser Modul die Max - bzw. Minbedingung? Berechnen Sie die unzerlegbaren nicht-trivialen Teilmoduln von R. Berechnen Sie eine Kompositionsreihe von R.
Hinweis: Zerlegen Sie R in eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln. Berechnen Sie dann alle einfachen Teilmoduln.

Aufgabe 12:

Sei K ein Körper. Betrachten Sie den Ring

$$R := \begin{pmatrix} K & K & K \\ K & K & K \\ K & K & K \end{pmatrix}$$

als Modul über sich selbst (durch Linksmultiplikation). Erfüllt dieser Modul die Max - bzw. Minbedingung, ist er unzerlegbar ? Berechnen Sie alle 2-seitigen Ideale von R.

Aufgabe 13:

Sei K ein Körper und G die Gruppe der oberen regulären $3x3$ - Matrizen über K.
$M = K^3$ werde durch Linksmultiplikation als KG - Modul betrachtet. Ist M unzerlegbar? Berechnen Sie eine Kompositionsreihe von M. Was ändert sich, wenn man G durch die Gruppe $GL(3, K)$ ersetzt ?
Hinweis: Vergleiche auch Aufgabe 11.

Aufgabe 14:

Sei K ein Körper, G eine endliche Gruppe und $H \leq G$. Der K - Vektorraum auf der Menge der Linksnebenklassen G/H wird durch Linksmultiplikation von G auf G/H zu einem KG - Modul, der mit KG/H bezeichnet werde.
Der von der Abbildung $g \mapsto gH$ induzierte KG - Homomorphismus κ ist surjektiv.
Zeigen Sie: $Ker\kappa$ ist genau dann ein direkter Summand von KG, wenn die Charakteristik von K kein Teiler von $|H|$ ist.

Aufgabe 15:

Sei G eine endliche p - Gruppe und K ein Körper der Chrakteristik p. Zeigen Sie, dass die triviale K-Darstellung vom Grad 1 die einzige irrreduzible K - Darstellung von G ist.
Hinweise: Zeigen Sie, dass jeder KG - Modul $M \neq 0$ ein Element $m \neq 0$ besitzt mit $g \cdot m = m \ \forall g \in G$.
Betrachten Sie zuerst den Fall, dass K endlich ist.