Gewöhnliche Darstellungen endlicher Gruppen **Prof. Dr. W. Kimmerle**
SS 2015

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Für die Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$ bzw. $\mathbb{F}_3$ bestimme man, ob die natürliche Darstellung der symmetrischen Gruppe S_3 zerlegbar ist.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen eine Untergruppe U von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ und vermitteln eine $\mathbb{Q}$ - Darstellung vom Grad 2 von U. Bestimmen Sie $|U|$ und den Isomorphietyp von U.
Ist die dadurch gegebene Darstellung zerlegbar ?

Aufgabe 3:

Im $\mathbb{R}^3$ bilden die Punkte

$$(1,0,0), (0,1,0), (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,-1)$$

einen Oktaeder O. Bezeichne G die Gruppe, die aus allen orientierungserhaltenden Bewegungen besteht, die O festlassen.
Zeigen Sie zuerst, dass eine Ecke von O durch eine Bewegung in G in jede andere Ecke von O überführt werden kann. Berechnen Sie dann $|G|$ und bestimmen Sie von G eine treue ganzzahlige Darstellung vom Grad 3 (Die Angabe der Matrizen eines Erzeugendensystems von G genügt).

Die nächsten zwei Aufgaben sind wichtige Wiederholungen Linearer Algebra.

Aufgabe 4:

Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ von endlicher Ordnung. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. Hinweis: Jordansche Normalform
Ist diese Aussage noch richtig, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen endlichen Körper ersetzt ?

Aufgabe 5:

Sei K ein Körper.
a) Sei $A \in M(n, K)$. Unter der $\mathrm{Spur}(A)$ versteht man die Summe der Hauptdiagonalelemente von A. Sei $B \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(BAB^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)$.
b) Bestimmen Sie das Zentrum von $\mathrm{GL}(n, K)$.