

COMPUTERPRAKTIKUM POLYVALENZ, GAP

Die erste Zassenhausvermutung und die Primgraphfrage

Einführung: (Sie brauchen nicht alles in dieser Einleitung nachzuvollziehen, sie dient nur der Motivation, die Aufgabe erschließt sich auch so.) Ein seit den 30er-Jahren studiertes Gebiet der Algebra sind die sogenannten ganzzahligen Gruppenringe, geschrieben $\mathbb{Z}G$ (vgl. etwa das Lehrbuch P.C. Milies, S.K. Sehgal, An Introduction to Group Rings) und hierin insbesondere die Einheiten endlicher Ordnung. Eine Einheit heißt **normalisiert**, falls ihre Koeffizientensumme 1 ist.

In den 60er-Jahren äußerte H.J. Zassenhaus eine Vermutung über diese Einheiten, welche bis heute offen ist.

(ZC): Ist G eine endliche Gruppe und $u \in \mathbb{Z}G$ eine normalisierte Einheit endlicher Ordnung, so existiert eine Einheit $x \in \mathbb{Q}G$, so dass $x^{-1}ux \in G$ gilt.

Da sich die Zassenhausvermutung trotz hartnäckiger Versuche im Allgemeinen nicht lösen ließ, schlug W. Kimmerle als eine Art ersten Schritt auf dem Weg zur Zassenhausvermutung die sogenannte Primgraphfrage vor.

(PQ): Sind p und q verschiedene Primzahlen und enthält $\mathbb{Z}G$ eine normalisierte Einheits der Ordnung pq , so enthält auch G ein Element der Ordnung pq .

Für eine Reihe von Gruppen konnte diese Vermutungen gezeigt werden. In diesem Projekt sollen Sie ein Programm schreiben, welches von einer gegebenen Gruppe entscheidet, ob für diese die Zassenhausvermutung bzw. Primgraphfrage bereits bewiesen wurde oder nicht.

Satz: Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt für G die Zassenhaus-Vermutung, wenn G eine der Eigenschaften der folgenden Liste erfüllt:

- G ist nilpotent. (Weiss '91)
- G hat eine normale p -Sylowgruppe mit abelschem Komplement. (Hertweck '06)
- G hat einen zyklischen Normalteiler N , so dass G/N abelsch ist. (Caicedo-Margolis-del Rio '13)
- G hat einen abelschen Normalteiler N , so dass $|G/N| = p$ eine Primzahl ist, die kleiner ist als jede Primzahl, welche $|N|$ teilt. (Marciniak-Ritter-Sehgal-Weiss '86)
- G ist ein semidirektes Produkt $N \rtimes A$, so dass N eine elementar-abelsche p -Gruppe ist, A abelsch und weiterhin $N = C_G(n)$ für jedes $n \in N$ gilt. (Sehgal-Weiss '86)
- Es existieren Primzahlen p und q , so dass $|G| = p^a q^b$ gilt und G eine Frobenius-Gruppe ist, d.h. G hat eine Sylowgruppe X , so dass $g^{-1}Xg \cap X = 1$ gilt für alle $g \in G \setminus X$. (Juriaans-Polcino Milies '00)
- G hat höchstens Ordnung 159. (Herman-Singh '15)
- G ist eine der Gruppen $\text{PSL}(2, q)$ mit $q \leq 25$.
- G ist das direkte Produkt $M \times N$ einer Gruppe M , für welche die Zassenhausvermutung bekannt ist, und einer nilpotenten Gruppe N , so dass die Ordnungen von N und M teilerfremd sind. (Hertweck '08)
- G ist das direkte Produkt einer Gruppe, für welche die Zassenhausvermutung gilt, und einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2. (Höfert '04)

Aufgabe 1: Schreiben Sie ein GAP-Programm, welches von einer gegebenen Gruppe G entscheidet, ob für diese die Zassenhausvermutung bereits bewiesen wurde oder nicht.

Aufgabe 2: Wenden Sie ihr Programm auf alle Gruppen bis Ordnung 200 an und erstellen Sie eine Liste derjenigen Gruppen, für die die Zassenhaus-Vermutung bisher noch nicht bewiesen ist. Geben Sie die Struktur der kleinsten möglichen Gegenbeispiele für die Zassenhaus-Vermutung genau an.

Im Gegensatz zur Zassenhausvermutung gelang für die Primgraphfrage eine starke Reduktion: Gilt (PQ) für alle fast-einfachen Bilder einer Gruppe

G , so gilt (PQ) für G . (Kimmerle-Konovalov '12). Man nennt eine Gruppe fast-einfach, falls sie zwischen einer einfachen nicht-abelschen Gruppe S und ihrer Automorphismengruppe „gesandwich“ ist, d.h. $S \leq G \leq \text{Aut}(S)$.

Satz: Abgesehen von obiger Reduktion ist die Primgraphfrage bekannt für:

- Auflösbare Gruppen. (Kimmerle'06)
- Die Gruppen $\text{PSL}(2, p)$ (Hertweck '07) und $\text{PGL}(2, p)$ für eine Primzahl p .
- Die kleinere Hälfte der 26 sporadischen Gruppen und ihre Automorphismengruppen. (Bovdi-Konovalov et al. '07-'12)
- Alternierende Gruppen bis Grad 10 (Salim '11, '13) und die zugehörigen fasteinfachen Gruppen. (Bächle-Margolis '14)
- Fast-einfache Gruppen, deren Ordnung durch genau drei paarweise verschiedene Primzahlen teilbar ist. (Kimmerle-Konovalov '12, Bächle-Margolis '14)

Aufgabe 3: Schreiben Sie ein GAP-Programm, welches von einer gegebenen Gruppe G entscheidet, ob für diese die Primgraphfrage bereits bewiesen wurde oder nicht. Beachten Sie, dass die Zassenhausvermutung die Primgraphfrage impliziert.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die kleinsten 20 Gruppen, für die die Primgraphfrage nicht bekannt ist.

Aufgabe 5: Reichen Sie ihre Programme und die Ergebnisse aus Aufgabe 2 und 4 an die HeLP-Gruppe weiter. Falls notwendig, bringen Sie der Gruppe bitte bei, die Programme zu nutzen.

Hinweis: Versuchen Sie Ihre Programme so zu gestalten, dass sich diese gut ergänzen lassen, falls die Vermutungen für weitere Gruppen bewiesen werden sollten.

Reichen Sie eine Dokumentation Ihrer Ergebnisse ein. Falls Sie in Aufgabe 2 und 4 ebenfalls Programme geschrieben haben, so reichen Sie diese auch ein, ansonsten genügen log-files.