

COMPUTERPRAKTIKUM POLYVALENZ, GAP

Sylowzahlen

1872 veröffentlichte Ludwig Sylow die nach ihm benannten Sylow-Sätze. Die Anzahl der p -Sylowgruppen, bezeichnet mit $n_p(G)$, heißt **Sylowzahl**. Rund 100 Jahre nach Sylow kam die Frage auf, welche Eigenschaften durch Sylowzahlen bestimmt werden und umgekehrt. Insbesondere stellt sich die Frage, ob zwei Gruppen gleicher Ordnung mit gleichen Konjugiertenklassen und Normalteilverbänden auch gleiche Sylowzahlen besitzen. Ihre Aufgabe soll es sein, Kandidaten für mögliche Gegenbeispiele zu bestimmen.

Aufgabe 1: Schreiben Sie ein Programm, welches zu einer gegebenen Gruppe zu jeder Primzahl p , welche die Ordnung von G teilt, die Anzahl der p -Sylowgruppen berechnet.

Aufgabe 2: Schreiben Sie ein Programm, welches alle Gruppen G mit $|G| \leq 1000$ bestimmt,

- die nicht nilpotent - by - nilpotent sind, d.h. es gibt keinen nilpotenten Normalteiler mit nilpotenter Faktorgruppe,
- die mindestens zu zwei verschiedenen Primzahlen nicht-zyklische p -Sylowgruppen besitzen,
- deren minimale Normalteiler nicht zyklisch sind,
- die nicht ein direktes Produkt kleinerer Gruppen sind und
- triviales Zentrum haben.

Ersetzen Sie 1000 ggf. durch 4000.

Aufgabe 3: Berechnen Sie alle Sylowzahlen der in Aufgabe 2 bestimmten Gruppen. Gibt es solche Gruppen gleicher Ordnung, die verschiedene Sylowzahlen besitzen, aber eine gleiche Anzahl von Konjugiertenklassen? Wenn ja, sind ihre Normalteilverbände gleich?

Aufgabe 4: Schreiben Sie ein Programm, welches zu vorgegebenen Zahlen a_2, a_3 und a_5 nach einer Gruppe G sucht mit $a_2 = n_2(G), a_3 = n_3(G), a_5 = n_5(G)$. Bestimmen Sie alle Gruppen deren Ordnung ein Teiler von $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ ist mit trivialem Zentrum und $1 < n_2(G) \leq 15, 1 < n_3(G) \leq 10, 1 < n_5(G) \leq 6$. Welche Sylowzahlen $\neq 1$ tauchen bei Gruppen der Ordnung ≤ 400 auf? Überlegen Sie, welche Gruppen Sie hierbei nicht zu untersuchen brauchen.

Reichen Sie Ihre Programme aus Aufgabe 1, 2 und 4 und Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 2 bis 4 ein. Falls Sie für andere Aufgaben auch Programme geschrieben haben, reichen Sie diese ebenfalls ein, ansonsten genügen .log-files.