

COMPUTERPRAKTIKUM POLYVALENZ

p -Gruppen vom Rang 2

Einführung. Es seien G, H p -Gruppen und \mathbb{F}_p der Körper mit p Elementen, wobei p prim sei. Das Modulare Isomorphieproblem fragt, ob aus der Isomorphie der Gruppenalgebren $\mathbb{F}_p G$ und $\mathbb{F}_p H$ die Isomorphie der Gruppen G und H folgt. Dies ist eine offene Frage.

Eine Eigenschaft einer Gruppe G heiße *bestimmt*, falls aus $\mathbb{F}G \cong \mathbb{F}H$ folgt, dass auch die Gruppe H diese Eigenschaft besitzt.

Für ein paar grundlegende Eigenschaften einer Gruppe ist bekannt, dass diese bestimmt sind. Das für dieses Praktikum zentrale Resultat geht auf D. Quillen zurück.

Hierfür erinnern wir daran, dass der p -Rang einer endlichen Gruppe G definiert ist als die \mathbb{F}_p -Dimension der größten elementarabelschen Untergruppe von G .

Satz 1 (D. Quillen). Es sei G eine endliche Gruppe. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Die Anzahl der Konjugiertenklassen maximal elementarabelscher Untergruppen einer bestimmten Ordnung ist bestimmt.
- (ii) Insbesondere ist der p -Rang von G bestimmt.

Aus diesem Satz folgt, dass bei der Suche nach einem Gegenbeispiel nur Paare von Gruppen mit gleichem p -Rang in Frage kommen.

Weitere Eigenschaften, welche bestimmt sind, sind in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 2. Es sei G eine p -Gruppen. Dann gilt

- Die Gruppenordnung von G ist bestimmt.

- Das Zentrum $Z(G)$ ist bestimmt.
- Die Abelisierung G/G' von G ist bestimmt.,
- Bezeichne $\Phi(G)$ die Frattini-Untergruppe von G , dann ist $G/\Phi(G)$ bestimmt.
- Die Anzahl der Konjugiertenklassen von G ist bestimmt.
- Es ist sogar die Anzahl der Konjugiertenklassen von G^{p^n} ist für alle $n \geq 0$ bestimmt.
- Es sei $\{g_1, \dots, g_t\}$ ein Repräsentantensystem der Konjugiertenklassen von G , dann ist

$$\sum_{i=1, \dots, t} \log_p |C_G(g_i)/\Phi(C_G(g_i))|$$

bestimmt.

Bekannte allgemeine Aussagen über das modulare Isomorphieproblem sind in folgendem Satz zusammengefasst

Satz 3. Sei G eine p -Gruppe.

- (i) Das Modulare Isomorphieproblem hat eine positive Antwort, falls G abelsch ist.
- (ii) Das Modulare Isomorphieproblem hat eine positive Antwort, falls G metazyklisch ist.
- (iii) Ist $|G| = p^s$ mit $1 \leq s \leq 5$, dann hat das Modulare Isomorphieproblem eine positive Antwort.
- (iv) Das Modulare Isomorphieproblem hat eine positive Antwort für Gruppen der Ordnungen $2^6, 2^7, 2^8, 2^9$ und 3^6 .

In diesem Praktikum wollen wir 2-Gruppen und 3-Gruppen vom p -Rang 2 untersuchen. Für ungerade p sind die Gruppen vom Rang 2 klassifiziert. Es gilt der folgende Satz

Satz 4 (Blackburn). Es sei G eine p -Gruppe vom Rang 2. Dann ist G in genau einer der folgenden Klassen von Gruppen enthalten:

- Die nicht-zyklischen metazyklischen p -Gruppen.

- Die Gruppen $C(p, r)$, $r \geq 3$, welche durch folgende Präsentationen gegeben sind:

$$C(p, r) := \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^{p^{r-2}} = 1, [a, b] = c^{p^{r-3}}, [a, c] = [b, c] = 1 \rangle.$$

- Die Gruppen $G(p, r; \varepsilon)$, wobei $r \geq 4$ und ε entweder 1 oder ein quadratischer Nicht-Rest modulo p ist, welche durch folgende Präsentationen gegeben sind:

$$G(p, r; \varepsilon) := \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^{p^{r-2}} = [b, c] = 1, [a, b^{-1}] = c^{\varepsilon p^{r-3}}, [a, c] = b \rangle.$$

- Falls $p = 3$ ist, die 3-Gruppen von maximaler Klasse mit Ausnahme der zyklischen Gruppen und des Kranzprodukts $C_3 \wr C_3$.

Ein analoges Resultat für $p = 2$ ist unbekannt. Es gilt aber folgender Satz

Satz 5. Es sei G eine 2-Gruppe vom Rang 2. Dann besitzt G eine maximale Untergruppe, welche höchstens 3 Involutionen besitzt.

Es gilt, dass 2-Gruppen mit einer oder zwei Involutionen entweder zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen sind. Für Gruppen G , die drei Involutionen besitzen, ist eine der folgenden Aussagen immer wahr:

Satz 6. • G ist metazyklisch.

- G enthält keinen Normalteiler der Form $C_4 \times C_4$.
- G enthält einen metazyklischen Normalteiler, dessen Index höchstens 4 beträgt, mit zyklischem Quotienten.
- G enthält einen maximalen metazyklischen Normalteiler vom Index 4 mit elementarabelschen Quotienten.
- G ist isomorph zu einer der folgenden acht Gruppen Ordnung 2^8 :

$$G = \langle g, h \mid g^{16} = 1, g^4 = y, h^4 = y^2, (h^2 g)^2 = u^i y^{2\eta} g^2, u^4 = [u, y] = 1, \\ (gh)^2 = u^{2\varepsilon} y^2, u^g = uy, y^g = y, u^h = uy, y^h = u^2 y^{-1} \rangle$$

mit $i = \pm 1$ und $\varepsilon, \eta = 0, 1$.

- G ist isomorph zu einer der folgenden Gruppen der Ordnung 2^8 :

$$G = \langle g, t \mid g^8 = t^{16} = 1, g^4 = t^8 = z, t^2 = a, a^g = au^{-1}, u^4 = [a, u] = 1, \\ u^g = u^{-1}a^2, u^t = u^{-1}a^2, (gt)^2 = zu^i, i = 0, 1, 2, 3 \rangle$$

- Für $|G| = 2^{2n+4}$ mit $n > 2$ eine weitere Klasse, die aber für das Praktikum nicht relevant und hier aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgelassen wird.

Aufgabe 1. Implementieren Sie Funktionen in **GAP**, die die Daten aus Satz 2 berechnen.

Implementieren Sie zusätzlich eine Funktion, die die Anzahl der Konjugationsklassen maximaler elementarabelscher Untergruppen aller vorhandener Ordnungen bestimmt.

Aufgabe 2. Wir wollen nun die Gruppen vom Rang 2 für die 3-Gruppen der Ordnungen 3^n mit $4 \leq n \leq 7$ betrachten.

Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Gruppen aus Satz 4.

Aufgabe 3. Wenden Sie die Funktionen aus Aufgabe 1 auf die Gruppen aus Satz 4 an, die nicht metazyklisch sind.

Trennen diese Daten die Gruppen innerhalb der Klasse der Gruppen aus Satz 4?

Trennen diese Daten die Gruppen aus Satz 4 von den anderen zwei Klassen von Gruppen?

Wenn dies nicht der Fall ist, geben Sie die zu jeder Gruppe aus Satz 4 die Menge aller Gruppen an, die von den Funktionen aus Aufgabe 1 nicht unterschieden werden können.

Aufgabe 4. Wir wollen nun Gruppen vom Rang 2 für die 2-Gruppen der Ordnungen 2^n mit $4 \leq n \leq 9$ betrachten.

Verifizieren Sie Aussage aus Satz 6.

Aufgabe 5. Wenden Sie die Funktionen aus Aufgabe 1 auf die nicht metazyklischen 2-Gruppen an.

Trennen diese Daten diese Gruppen? Wenn dies nicht der Fall ist (wovon auszugehen ist), untersuchen Sie, ob in den Äquivalenzklassen von Gruppen mit gleichen Daten nur Gruppen enthalten sind, die dieselbe Aussage aus Satz 6 erfüllen.

Reichen Sie eine Dokumentation Ihrer Ergebnisse ein. Falls Sie in den Aufgaben 2-5 ebenfalls Programme geschrieben haben, so reichen Sie dieses auch ein, ansonsten genügen log-files.