Fachbereich Mathematik
T. Vassias
SS 2015
Monomiale Darstellungsringe

Computerpraktikum Polyvalenz

Monomiale Darstellungsringe

Definition. Es sei G eine endliche Gruppe. Setze

$$\mathcal{M}(G) := \{(H, \varphi) \mid H \leq H, \varphi \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)\}.$$

Elemente dieser Menge nennt man *monomiale Paare*.

Die Homomorphismen in $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ (von H in die Einheitengruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ des Körpers der komplexen Zahlen) nennt man *lineare Charaktere* der Untergruppe H.

Die Gruppe G operiert auf $\mathcal{M}(G)$ via ${}^g(H, \varphi) = ({}^gH, {}^g\varphi)$, wobei ${}^g\varphi \in \mathrm{Hom}({}^gH, \mathbb{C}^*)$ und ${}^g\varphi({}^gh) := \varphi(h)$ für $h \in H$.

Es bezeichne $[H, \varphi]_G$ die Bahn von (H, φ) unter der Operation von G. Es ist also

$$\mathcal{M}(G)/G = \{[H, \varphi]_G \mid (H, \varphi) \in \mathcal{M}(G)\}.$$

Definition. Der *Ring der monomialen Darstellungen* $D(G)$ ist die freie abelsche Gruppe mit Basis $\mathcal{M}(G)/G$ mit der Multiplikation

$$[H, \varphi]_G \cdot [U, \psi]_G := \sum_{HgU \in H\backslash G/U} [H \cap {}^gU, \varphi\,|_{H \cap {}^gU} \cdot {}^g\psi\,|_{H \cap {}^gU}]_G.$$

Wir wollen nun Ringhomomorphismen der Form $D(G) \to \mathbb{C}$ betrachten, sogenannte *Spezies* von $D(G)$. Hierfür betrachten wir folgende Menge

$$\mathcal{D}(G) := \{(H, hH') \mid H \leq G, h \in H\}.$$

G operiert auf $\mathcal{D}(G)$ via ${}^g(H, hH') := ({}^gH, {}^gh{}^gH')$ für $g \in G$. Es gilt nun folgender

Satz 1. Die Menge aller Spezies steht in Bijektion zu der Menge $\mathcal{D}(G)/G$. Genauer gilt, dass es zu jeder Spezies s ein Element $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ gibt, so dass

$$s([U,\psi]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\psi]_G) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ H \leq {}^gU}} {}^g\psi(h),$$

wobei $[U,\psi]_G \in \mathcal{D}(G)/G$ ein Basiselement von $D(G)$ ist, so dass die Abbildung eindeutig definiert ist.

Man ordne nun die Elemente in $\mathcal{M}(G)/G$ aufsteigend nach Gruppenordnung an (dies ist natürlich nicht eindeutig). Ferner sollen die Elemente, in der dieselbe Gruppe vorkommt, blockweise angeordnet werden.

Man ordne nun die Elemente in $\mathcal{D}(G)/G$ genau wie in $\mathcal{M}(G)/G$ an. Hierfür benötigt man fest gewählte Isomorphismen $\alpha_H\colon \mathrm{Hom}(H,\mathbb{C}^*) \to H/H'$ für alle Untergruppen $H \leq G$.

Die *Speziestafel* von $D(G)$ ist nun die $n \times n$-Matrix $(S_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ mit $n = |\mathcal{D}(G)/G| = |\mathcal{M}(G)/G|$, die wie folgt definiert ist:

$$S_{ij} = s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\psi]_G),$$

wobei (H, hH') das i-te Element in $\mathcal{D}(G)/G$ und $[U,\psi]_G$ das j-te Element in $\mathcal{M}(G)/G$ seien.

Es gelten folgende Aussagen zu den monomialen Darstellungsringen

Satz 2. Es seien G, H endliche Gruppen.

- Ist G abelsch und gilt $D(G) \cong D(H)$, dann ist H abelsch und es gilt $G \cong H$.
- Gilt $D(G) \cong D(H)$, dann ist $|G| = |H|$.
- Es sei $|G|$ ungerade und und es seien $D(G)$ und $D(H)$ isomorph sind. Dann sind die Burnsideringe $B(G)$ und $B(H)$ isomorph.

Es gilt ferner folgender

Satz 3. Es seien G und G' endliche Gruppen, so dass $B(G) \cong B(G')$. Dann existiert eine Bijektion zwischen den Konjugationsklassen auflösbarer Untergruppen von G und G', welche die Ordnungen der Untergruppen und die Länge der Konjugationsklassen erhält.

Ada Rottländer hat schon in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts Gruppen untersucht, die die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllen.

Satz 4 (A. Rottänder)**.** Es seien p, q prim. Fener gelte $q > p$ und $q - 1 \equiv 0 \mod p$. Es seien die Gruppen

$$\langle S, T_1, T_2 \mid S^p = 1, S^{-1}T_1S = T_1^\rho, S^{-2}T_2S = T_2^{\rho^\mu}, T_1^q = T_2^q = 1, T_1T_2 = T_2T_1 \rangle$$

mit $1 \leq \mu \leq p-1$ und ρ so gewählt, dass $\rho^p \equiv 1 \mod q$. Dann sind zwei solcher Gruppen genau dann isomorph, falls $\mu\mu' \equiv 1 \mod p$.

An anderer Stelle findet man eine alternative Definition der Rottländer Gruppen:

Satz 5. Es seien $q \geq 5$ und p Primzahlen mit $q \equiv 0 \mod (p-1)$. Ferner sei $r \in \mathbb{N}$ so, dass $r \not\equiv 1 \mod p$ und $r^q \equiv 1 \mod p$. Es sei für jedes $\lambda \in \Lambda = \{2, \ldots, q-1\}$ die Gruppe

$$G_\lambda := \langle x, y, a \mid x^p = y^p = a^q = [x, y] = 1, a^{-1}xa = x^r, a^{-1}ya = y^{r^\lambda} \rangle$$

definiert.

Dann sind zwei Gruppen G_λ, G_μ genau dann isomorph, wenn $\lambda\mu \equiv 1 \mod q$.

Aufgabe 1. Schreiben Sie eine Funktion in `GAP`, die zu einer gegebenen Gruppe die Mengen $\mathcal{D}(G)/G$ und $\mathcal{M}(G)/G$ bestimmt.

Aufgabe 2. Schreiben Sie eine Funktion in `GAP`, die das Produkt zweier Basiselemente aus $\mathcal{M}(G)/G$ berechnet.

Aufgabe 3. Schreiben Sie eine Funktion in `GAP`, die die Speziestafel einer Gruppe G berechnet.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie exemplarisch für Gruppen, deren Ordnung ≤ 2000 (oder falls möglich ≤ 4000) ist, ob Satz 4 und Satz 5 dieselben Gruppen liefern. Falls dies nicht der Fall ist, untersuchen Sie für die kleinsten vorkommenden Gruppen, ob für diese eine Bijektion, wie in Satz 3 beschrieben, existiert. .

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Speziestafeln für die kleinsten 3 Rottländer Gruppen und untersuchen Sie, ob diese gleich sind (bis auf Permutation von Spalten und Zeilen).

Aufgabe 6. Implementieren Sie einen Algorithmus in `GAP`, der zwei Gruppen G, G' auf folgendes untersucht:

Existiert eine Bijektion F wie in Satz 3 beschrieben, die sich zu einer (gleich bezeichneten) Bijektion $F\colon \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G')$ erweitern lässt, so dass für $[H, \varphi]_G \in \mathcal{M}(G), [H', \varphi']_{G'} \in \mathcal{M}(G')$ mit $F([H, \varphi]_G) = [H', \varphi']_{G'}$ gilt

$$|[H, \varphi]_G| = |[H', \varphi']_{G'}|?$$

Testen Sie Ihre Funktion an der kleinsten Rottländer Gruppe.

Reichen Sie eine Dokumentation Ihrer Ergebnisse ein. Falls Sie in den Aufgaben 4 und 5 ebenfalls Programme geschrieben haben, so reichen Sie dieses auch ein, ansonsten genügen log-files.