Computerpraktikum, MATLAB

Iterative Löser

Einführung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Gesucht ist nun ein $x \in \mathbb{R}^n$, sodass folgendes lineares Gleichungssystem erfüllt wird

$$Ax = b. \tag{1}$$

Für kleines $n \in \mathbb{N}$ kann das LGS in (1) mittels Gauß'schem Elimininationsverfahren exakt gelöst werden. Dies ist jedoch sehr aufwendig in der Berechnung. Darum wurden *iterative Löser* entwickelt, um auch größere Gleichungssysteme effizient lösen zu können. Diese sind zwar i.A. nicht mehr exakt, können aber mittels geeignet vieler Iterationen eine sehr hohe Genauigkeit der Lösung erzielen. Hier muss oft zwischen Aufwand und Genauigkeit abgewägt werden.

Aufgabe 1: Arbeiten Sie sich in das Thema der iterativen Löser ein. Beschränken Sie sich hierbei auf folgende Löser:

- Jacobi-Verfahren
- SOR-Verfahren (insbesondere Gauß-Seidel)
- CG-Verfahren

Aufgabe 2: Implementieren Sie in MATLAB das Gauß'sche Eliminationsverfahren und verifizieren Sie anschließend die Richtigkeit ihrer Implementierung. Hierbei darf die MATLAB-eigene Funktion `inv` verwendet werden.

Aufgabe 3: Implementieren Sie in MATLAB das Jacobi-, das SOR- (insbesondere Gauß-Seidel), sowie das CG-Verfahren. Verifizieren Sie auch hier die Richtigkeit der Lösung. Auch sollten Sie sich über ein geeignetes Abbruchkriterium der Löseriterationen Gedanken machen.

Aufgabe 4: Führen Sie verschiedene Test an der von Ihnen implementierten Verfahren durch (Benötigte Zeit zum Lösen, Anzahl der Iterationen, Residuumsverlauf, Parametertests beim SOR-Verfahren...) und erstellen Sie hierfür aussagekräftige Diagramme.

Bemerkung: Hinterher sollen Sie mit den genannten Verfahren folgende Matrix lösen können:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Implementieren Sie diese Matrix für beliebige $n \in \mathbb{N}$.