Fachbereich Mathematik
L. Margolis

SS 2015
HeLP

Computerpraktikum Polyvalenz, GAP

Die HeLP-Methode

Einführung: (Sie brauchen nicht alles in dieser Einleitung nachzuvollziehen, sie dient nur der Motivation, die Aufgabe erschließt sich auch so.) Ein seit den 30er-Jahren studiertes Gebiet der Algbera sind die sogennaten ganzzahligen Gruppenringe, geschrieben $\mathbb{Z}G$ (vgl. etwa das Lehrbuch P.C. Milies, S.K. Sehgal, An Introduction to Group Rings) und hierin insbesondere die Einheiten endlicher Ordnung. Eine Einheit heißt **normalisert**, falls ihre Koeffizientensumme 1 ist. Die Menge der normalisierten Einheiten wird mit $\mathrm{V}(\mathbb{Z}G)$ bezeichnet.
In den 60er-Jahren äußerte H.J. Zassenhaus eine Vermutung über diese Einheiten, welche bis heute offen ist.

(ZC): Ist G eine endliche Gruppe und $u \in \mathbb{Z}G$ eine normalisierte Einheit endlicher Ordnung, so existiert eine Einheit $x \in \mathbb{Q}G$, so dass $x^{-1}ux \in G$ gilt.

Da sich die Zassenhausvermutung trotz hartnäckiger Versuche im Allgemeinen nicht lösen ließ, schlug W. Kimmerle als eine Art ersten Schritt auf dem Weg zur Zassenhausvermutung die sogennante Primgrapfrage vor.

(PQ): Sind p und q verschiedene Primzahlen und enthält $\mathbb{Z}G$ eine normalisierte Einheite der Ordnung pq, so enthält auch G ein Element der Ordnung pq.

Für eine Reihe von Gruppen konnte diese Vermutungen gezeigt werden. In diesem Projekt sollen Sie sich mit einer algorithmischen Methode zur Untersuchung dieser Vermutungen befassen, deren Implementation kürzlich als GAP-package veröffentlicht wurde. Dies ist die sogennante *He*rtweck-*L*uthar-*P*assi Methode, kurz HeLP, die 1989 von Luthar und Passi eingeführt und 2004 von Hertweck wesentlich verbessert wurde.

Es sei x^G eine Konjugiertenklasse in G und $u = \sum_{g \in G} z_g g$ ein Element in $\mathbb{Z}G$. Dann heißt $\varepsilon_x(u) = \sum_{g \in x^G} z_g$ die **partielle Augmentation** von u bezüglich x. Der Zusammenhang zwischen partiellen Augmentationen und obigen Vermutungen wird durch folgenden Satz hergestellt:
Satz: Eine normalisierte Einheit u in $\mathbb{Z}G$ erfüllt genau dann die Zassenhausvermutung, wenn alle partiellen Augmentationen aller Potenzen von u nicht-negativ sind.

Die Grundidee der HeLP-Methode ist nun folgende: Sei u eine normalisierte Einheit der Ordnung n in $\mathbb{Z}G$ und D eine gewöhnliche Darstellung von G. Dann lässt sich D linear auf $\mathbb{Z}G$ ausdehnen und $D(u)$ ist eine über $\mathbb{C}$ diagonalsierbare Matrix. Ist ζ eine n-te komplexe Einheitswurzel, d.h. einer der möglichen Eigenwerte von $D(u)$, so lässt sich die Vielfachheit von ζ als Eigenwert von $D(u)$ mittels eines linearen Ausdrucks angeben, der die partiellen Augmentationen von u und seiner Potenzen involviert. Andererseits ist dies natürlich eine nicht-negative ganze Zahl und es ergibt sich eine lineare ganzzahlige Ungleichung. Löst man diese Ungleichungen für alle möglichen ζ, so kann man hoffen mit Hilfe obigen Satzes die Zassenhausvermutung für Einheiten der Ordnung n in $\mathrm{V}(\mathbb{Z}G)$ bewiesen zu haben. Hertweck konnte dieses Vorgehen auf p-modulare Darstellungen verallgemeinern, falls p kein Teiler von n ist. Konkret nutzt die Methode die Charaktertafel und u.U. Brauertafeln (eine Art Charaktertafeln für modulare Datrstellungen).

Aufgabe 0: Installieren Sie das GAP-Paket `HeLP`. Laden Sie es hierzu auf der Seite `http://homepages.vub.ac.be/~abachle/help` herunter und entpacken Sie es im Ordner `home/.gap/pkg` Führen Sie hiernach den Befehl `ln -s /opt/4ti2/bin/zsolve zsolve` in einer Konsole aus. Hiernach müsste das Paket mittels `LoadPackage("HeLP");` in GAP aufrufbar und funktionsfähig sein.

Aufgabe 1: Bovdi, Konovalov und verschiedene andere Autoren haben die HeLP-Methode genutzt, um die Primgraphfrage für die Hälfte der sporadischen einfachen Gruppen zu verifizieren. Suchen Sie sich zwei dieser Gruppen raus und verifizieren Sie die Ergebnisse. Sie können sich am Abschnitt 4.6 des HeLP-Manual orientieren.

Aufgabe 2: Wenden Sie die HeLP-Methode auf die von der Zassenhaus-Gruppe bestimmten minimalen möglichen Gegenbeispiele an. Sollte die HeLP-Methode bei einer Gruppe erfolglos sein, geben Sie bitte die kritischen Ordnungen an.

Aufgabe 3: Schreiben Sie ein Programm, welches zuerst mittels des Programms der Zassenhaus-Gruppe zu bestimmen versucht, ob die Zassenhausvermutung bzw. Primgraphfrage für eine Gruppe gilt, und falls dies nicht der Fall ist, die HeLP-Methode anwendet. Untersuchen Sie mit Hilfe dieses Programms die Zassenhausvermutung für Gruppen der Ordnung 392.

Aufgabe 4: (falls möglich) Finden Sie ein Beispiel für den erfolgreichen Einsatz des Wagner-Tests für eine Einheit, die weder von Primzahlpotenzordnung noch von Ordnung 12 ist. Siehe hierzu die Abschnitte 5.4 und 3.6 im HeLP-Manual.

Hinweis: Das `HeLP`-package ist zum Zeitpunkt der Vergabe dieses Praktikums genau eine Woche veröffentlicht. Teilen Sie daher jede Art von Ungereimtheiten, Fehlern etc. (auch z.B. Rechtschreibfehler im Manual), die Sie feststellen sollten, den Autoren des Pakets mit.
Für lange Rechnungen, wie sie in den Aufgaben auftreten könnten, ist es oft sinnvoll den `screen`-Befehl in Verbindung mit `lreauth` zu nutzen.

Reichen Sie eine Dokumentation Ihrer Ergebnisse ein. Falls Sie in den Aufgaben 1, 2 und 4 ebenfalls Programme geschrieben haben, so reichen Sie diese auch ein, ansonsten genügen log-files.