Fachbereich Mathematik
L. Margolis

SS 2015
Abelsche p-Gruppen

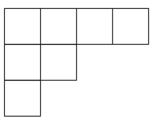
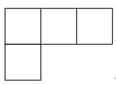
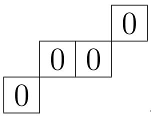
Computerpraktikum Polyvalenz, GAP

Thema: Untergruppen und Quotienten endlicher abelscher p-Gruppen

Einführung: Aus der Algebra kennen Sie die Klassifikation der endlich-erzeugten abelschen Gruppen. Insbesondere folgt hieraus, dass jede endliche abelsche p-Gruppe G die Gestalt $C_{p^{k_1}} \times C_{p^{k_2}} \times ... \times C_{p^{k_n}}$, mit gewissen $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$, besitzt. Es soll im Folgenden immer $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_n$ gelten. Eine Gruppe $U \cong C_{p^{l_1}} \times C_{p^{l_2}} \times ... \times C_{p^{l_n}}$ ist dann isomorph zu einer Untergruppe oder einem Quotienten von G, wenn $l_1, ..., l_n \in \mathbb{N}_0$ und $l_1 \leq k_1, ..., l_n \leq k_n$ gilt. Ziel dieses Projektes ist es bei gegebenen endlichen abelschen p-Gruppen G, U und Q zu bestimmen, ob G eine zu U isomorphe Untergruppe besitzt, so dass G/U isomorph zu Q ist.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass $G = C_8 \times C_2$ eine zu C_4 isomorphe Untergruppe U besitzt, so dass G/U zu C_4 isomorph ist. Zeigen Sie, dass $C_8 \times C_8$ keine zu C_8 isomorphe Untergruppe U besitzt, so dass $G/U \ncong C_8$ gilt. Sie dürfen dies mit oder ohne die Verwendung von GAP tun.

Definition: Ein Tupel ganzer Zahlen $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0$ nennt man eine **Partition**. $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ heißt **Unterpartition** von λ, wenn $\nu_1 \leq \lambda_1, \nu_2 \leq \lambda_2$ usw. gilt. Das zu λ gehörende **Young Diagramm** ist ein aus gleich großen, leeren Kästchen bestehendes Diagramm, welches in seiner ersten Reihe λ_1 Kästchen, in seiner zweiten Reihe λ_2 Kästchen usw. enthält. Ist ν eine Unterpartition von λ und lässt man die ν entsprechenden Kästchen im Young Diagramm weg, so erhält man das **Schiefdiagramm** von λ/ν.

Beispiele: Die zu den Partitionen $\lambda = (4, 2, 1)$ und $\nu = (3, 1, 0)$ gehörenden Young Diagramme sind  und . Das zu λ/ν gehörige Schiefdiagramm ist 

.

Enthält ein Young Diagramm bzw. Schiefdiagramm Einträge, üblicherweise natürliche Zahlen, so nennt man es **Young Tableau** bzw. **Schieftableau**. Ein Young (Schief)Tableau nennt man **semistandard**, wenn die Einträge in jeder Zeile von links nach rechts nicht kleiner werden und in jeder Spalte von oben nach unten stets größer werden. Ein Young (Schief)Tableau erfüllt die **Gitter-Eigenschaft**, wenn für das Wort, welches entsteht, wenn man die Einträge jeder Zeile des (Schief)Tableaus von rechts nach links hintereinander schreibt, gilt: Für jedes i ist die Anzahl der 1er in den ersten i Buchstaben mindestens so groß wie die Anzahl der 2er, die Anzahl der 2er mindestens so groß wie die Anzahl der 3er usw.

Beispiele: Die (Schief)Tableaus $\begin{array}{llll} \boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{1}\\ \boxed{2}&\boxed{2}&&\\ \boxed{3}&&& \end{array}$, $\begin{array}{llll} &&&\boxed{1}\\ &\boxed{2}&&\\ \boxed{1}&&& \end{array}$ sind semistandard und erfüllen die Gitter-Eigenschaft. Das Schieftableau $\begin{array}{lll} &&\boxed{2}\\ &\boxed{1}&\\ \boxed{1}&& \end{array}$ ist semistandard, erfüllt aber nicht die Gitter-Eigenschaft.

Jeder endlichen abelschen p-Gruppe $C_{p^{k_1}} \times C_{p^{k_2}} \times ... \times C_{p^{k_n}}$ wird nun die Partition $(k_1, k_2, ..., k_n)$ zugeordnet. Nun gilt:

Satz: Es seien G, U und Q endliche abelsche p-Gruppen und λ, μ und ν jeweils die zugehörigen Partitionen. Dann besitzt G eine zu U isomorphe Untergruppe $\tilde{U}$ mit $G/\tilde{U} \cong Q$ genau dann, wenn ein semistandard Young Schieftableau der Getalt λ/μ existiert, welches die Gitter-Eigenschaft erfüllt und welches ν_1 Mal die 1, ν_2 Mal die 2 usw. als Einträge enthält.
(Die Anzahl solcher möglichen Tableaus nennt man auch **Littlewood-Richardson Koeffizient.**)

Aufgabe 2: Das GAP-Paket `hecke` enthält eine Funktion namens `LittlewoodRichardsonCoefficient`. Begründen Sie, warum diese höchst ineffizient ist.

Aufgabe 3: Erstellen Sie eine GAP-Funktion, welcher für drei gegebene endliche abelsche p-Gruppen G, U und Q entscheidet, ob G eine zu U isomorphe Untergruppe $\tilde{U}$ enthält, so dass $G/\tilde{U} \cong Q$ gilt.
Demonstieren Sie die Überlegenheit ihrer Methode gegenüber `LittlewoodRichardsonCoefficient`.

Reichen Sie eine Dokumentation Ihrer Ergebnisse ein. Falls Sie in Aufagabe 1 und 2 Programme geschrieben haben, so reichen Sie diese ebenfalls ein, ansonsten genügen log-files.