

Aufgabe 3.1

- (a) Gibt es einen Körper mit genau 110 Elementen? Geben Sie eine kurze Begründung an.
- (b) Sei $f = X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist. Geben Sie eine kurze Erklärung, warum $K := \mathbb{F}_3[X]/(f)$ ein Körper ist. Wie viele Elemente hat K ?
Sei $\alpha := X + (f) \in K$. Bestimmen Sie die Ordnung von α in der multiplikativen Gruppe K^\times .

Aufgabe 3.2

Sei ζ eine Einheitswurzel der Ordnung 16 in \mathbb{C} und sei $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. Zeigen Sie, dass ζ^{10} die Ordnung 8 hat. Wie sehen die Minimalpolynome von ζ und ζ^{10} aus? Berechnen Sie $\text{Aut}(K, \mathbb{Q})$.
Gibt es einen Körper F mit $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq K$, so dass $[F : \mathbb{Q}] = 2$ gilt?